Plaquette 2 – Conjugué, module et parties réelle et imaginaire

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On installe les automatismes du calcul algébrique dans $\mathbb{C}$: conjuguer, mettre sous forme $a+ib$, calculer un module, résoudre une équation où l'inconnue et son conjugué apparaissent. Tout repose sur trois identités et sur la discipline de **toujours** revenir à la forme algébrique.

Exercice 1 – Forme algébrique d'un produit

Soit $z_1 = 3-2i$ et $z_2 = -1+4i$. Calculer $z_1 z_2$, z_1^2 et $(z_1+z_2)^2$ sous forme algébrique.

Exercice 2 – Quotient sous forme algébrique

Mettre sous forme algébrique $\dfrac{2+3i}{1-2i}$, puis $\dfrac{5}{3+4i}$.

Exercice 3 – Puissances de i

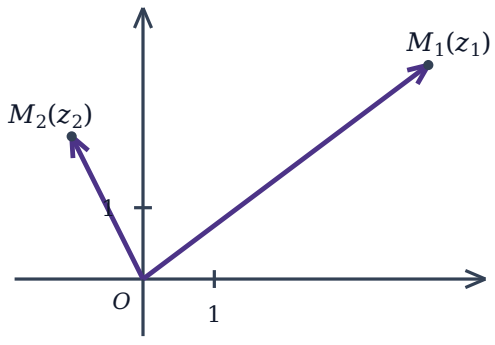
Calculer i^{2026}, i^{-7} et $1+i+i^2+\cdots+i^{99}$.

Exercice 4 – Résoudre une équation avec le conjugué

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z+3\overline{z} = 5-4i$.

Exercice 5 – Module et inégalité triangulaire

Soit $z_1 = 4+3i$ et $z_2 = -1+2i$. Comparer $|z_1+z_2|$ et $|z_1|+|z_2|$. Quand y a-t-il égalité ?



Les vecteurs d'affixes z_1 et z_2

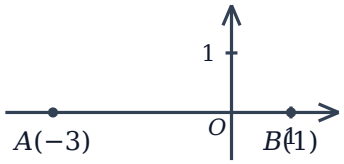
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Caractériser un réel

Déterminer l'ensemble des $z \neq -1$ tels que $Z = \dfrac{z-2}{z+1}$ soit réel.

Exercice 7 – Caractériser un imaginaire pur

Déterminer l'ensemble des $z \neq 1$ tels que $Z = \dfrac{z+3}{z-1}$ soit imaginaire pur.



Les points d'affixes -3 et 1, exclus de l'étude

Exercice 8 – Équation du second degré à coefficients réels

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 34 = 0$, puis factoriser le polynôme.

Exercice 9 – Racines carrées d'un complexe

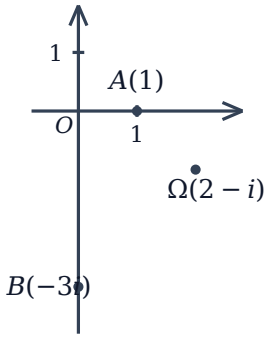
Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = 3 + 4i$.

Exercice 10 – Équation du second degré à coefficients complexes

Résoudre $z^2 - (3+i)z + (2+2i) = 0$.

Exercice 11 – Ensemble de points : module constant

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2 + i| = 3$, puis tels que $|z-1| = |z+3i|$.



Les points d'affixes $2-i$, 1 et $-3i$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Calculer une somme de puissances

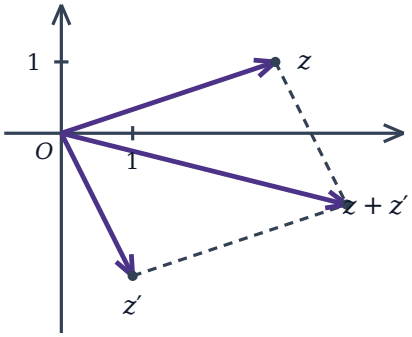
Soit $z = 1 + i$. Calculer z^2, z^4, z^8, puis z^{2026} sous forme algébrique.

Exercice 13 – Système dans C

Résoudre le système $\begin{cases} z + z' = 3 + i \\ z - iz' = 1 - 2i \end{cases}$.

Exercice 14 – Démontrer une identité

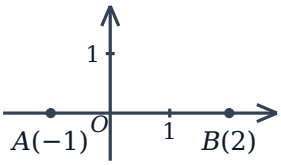
Démontrer que pour tous complexes z et z' : $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.



Le parallélogramme construit sur $z = 3 + i$ et $z' = 1 - 2i$

Exercice 15 – Ensemble défini par un quotient de modules

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 2$ tels que $\left|\dfrac{z+1}{z-2}\right| = 2$.



Les points A et B d'affixes -1 et 2

Exercice 16 – Synthèse : étude complète d'une expression

Soit $z = \dfrac{1 + 3i}{2 - i}$.

a) Mettre z sous forme algébrique.
b) Calculer $|z|$ et $z\overline{z}$.
c) Calculer z^2 et z^3, et en déduire z^{12}.
d) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe w tels que $|w - z| = |z|$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).