

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : démonstrations, suites et ensembles de points

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Dernière plaquette du chapitre : on ne calcule plus pour calculer, on **démontre**. Trois techniques reviennent sans cesse. Pour prouver qu'un complexe est réel, on montre qu'il est égal à son conjugué ; pour prouver qu'il est imaginaire pur, qu'il est égal à l'opposé de son conjugué. Pour déterminer un ensemble de points, on pose $z = x + iy$ et on retombe sur une équation de droite ou de cercle. Pour étudier une suite de complexes, on travaille séparément sur les modules et sur la forme algébrique. Rédaction soignée exigée : c'est le niveau attendu en maths expertes.

Exercice 1 - Réel ou imaginaire pur : les deux démonstrations de base

Soit z un nombre complexe quelconque. a) Démontrer que $z + \bar{z}$ est réel et que $z - \bar{z}$ est imaginaire pur ou nul.

b) Démontrer que $z\bar{z}$ est un réel positif.

c) En déduire que $z^2 + \bar{z}^2$ est réel, et le calculer en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$.

Exercice 2 - Complexes de module 1

Soit z un complexe tel que $|z| = 1$. a) Démontrer que $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

b) En déduire que $z + \frac{1}{z}$ est réel, et préciser entre quelles valeurs il est compris.

Exercice 3 - Un quotient imaginaire pur

Soit z un complexe de module 1, différent de 1. On pose $w = \frac{1+z}{1-z}$. Démontrer que w est imaginaire pur ou nul.

Exercice 4 - Racines conjuguées d'un polynôme réel

Soit a, b, c trois **réels** avec $a \neq 0$. Démontrer que si un complexe z_0 vérifie $az_0^2 + bz_0 + c = 0$, alors $\bar{z}_0$ vérifie aussi cette équation.

Exercice 5 - Polynôme de degré 3 à racine évidente

On pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$. a) Vérifier que 3 est racine de P .

b) Déterminer trois réels α, β, γ tels que $P(z) = (z - 3)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$.

c) Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 - Degré 3 avec une racine rationnelle

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^3 - 5z^2 + 8z - 20 = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle de la forme $\frac{p}{2}$ avec p entier.

Exercice 7 - Un système dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système

$$\begin{cases} z + 2w = 7 + i \\ 3z - w = 7 + 10i \end{cases}$$

Exercice 8 - Une équation où z et son conjugué se mêlent

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \bar{z}$.

Exercice 9 - Développer un carré de module

a) Démontrer que pour tous complexes z et z' :

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$$

b) En déduire l'**identité du parallélogramme** : $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

c) Interpréter géométriquement le résultat du b).

Exercice 10 - Un cercle caché derrière une équation en z et son conjugué

Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z vérifiant

$$z\bar{z} - 2(z + \bar{z}) = 5$$

Exercice 11 - Quand le carré est imaginaire pur

Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z non nulle tels que z^2 soit imaginaire pur.

Exercice 12 - Un rapport de distances

Déterminer l'ensemble A des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 2|z - i|$.

Exercice 13 - Une suite de complexes

On définit la suite (z_n) par $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$. a)

Calculer z_1 , z_2 et z_3 sous forme algébrique.

b) Exprimer $|z_n|$ en fonction de n .

c) Déterminer le plus petit entier n tel que $|z_n| < 0,01$.

Exercice 14 - Somme des termes d'une suite de complexes

On reprend la suite de l'exercice précédent : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$. On pose $S_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n$. a) Exprimer z_n en fonction de n .

b) Calculer S_3 sous forme algébrique.

c) Donner une expression de S_n à l'aide de la somme des termes d'une suite géométrique.

Exercice 15 - Un test d'appartenance à l'ensemble de Mandelbrot

En infographie, l'**ensemble de Mandelbrot** se construit ainsi : pour un complexe c fixé, on définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + c$. On admet le critère suivant : si un module $|u_n|$ dépasse 2, la suite diverge et le point c est **hors** de l'ensemble ; sinon on continue les itérations. On prend $c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 sous forme algébrique.

b) Calculer les modules correspondants, arrondis au millièème. Le critère d'arrêt est-il déclenché ?

c) Un programme teste $c = 1$. Montrer que le critère est déclenché dès u_3 .