Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : démonstrations, suites et ensembles de points

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Dernière plaquette du chapitre : on ne calcule plus pour calculer, on **démontre**. Trois techniques reviennent sans cesse. Pour prouver qu'un complexe est réel, on montre qu'il est égal à son conjugué ; pour prouver qu'il est imaginaire pur, qu'il est égal à l'opposé de son conjugué. Pour déterminer un ensemble de points, on pose $z = x + iy$ et on retombe sur une équation de droite ou de cercle. Pour étudier une suite de complexes, on travaille séparément sur les modules et sur la forme algébrique. Rédaction soignée exigée : c'est le niveau attendu en maths expertes.

Exercice 1 – Réel ou imaginaire pur : les deux démonstrations de base

Soit z un nombre complexe quelconque. a) Démontrer que $z + \overline{z}$ est réel et que $z - \overline{z}$ est imaginaire pur ou nul.

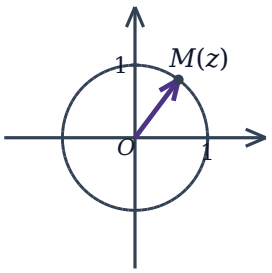
b) Démontrer que $z\overline{z}$ est un réel positif.

c) En déduire que $z^2 + \overline{z}^2$ est réel, et le calculer en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

Exercice 2 – Complexes de module 1

Soit z un complexe tel que $|z| = 1$. a) Démontrer que $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

b) En déduire que $z + \frac{1}{z}$ est réel, et préciser entre quelles valeurs il est compris.

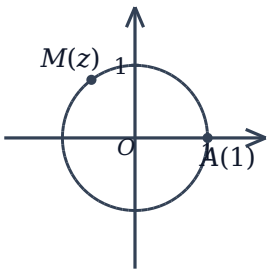


Un point M du cercle de centre O et de rayon 1

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Un quotient imaginaire pur

Soit z un complexe de module 1, différent de 1. On pose $w = \dfrac{1+z}{1-z}$. Démontrer que w est imaginaire pur ou nul.



Le point M sur le cercle unité, distinct de A

Exercice 4 – Racines conjuguées d'un polynôme réel

Soit a, b, c trois **réels** avec $a \neq 0$. Démontrer que si un complexe z_0 vérifie $az_0^2 + bz_0 + c = 0$, alors $\overline{z_0}$ vérifie aussi cette équation.

Exercice 5 – Polynôme de degré 3 à racine évidente

On pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$. a) Vérifier que 3 est racine de P.

b) Déterminer trois réels α, β, γ tels que $P(z) = (z-3)\left(\alpha z^2 + \beta z + \gamma\right)$.

c) Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 – Degré 3 avec une racine rationnelle

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^3 - 5z^2 + 8z - 20 = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle de la forme $\dfrac{p}{2}$ avec p entier.

Exercice 7 – Un système dans C

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système

$$\begin{cases} z + 2w = 7 + i \\ 3z - w = 7 + 10i \end{cases}$$

Exercice 8 – Une équation où z et son conjugué se mêlent

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \overline{z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

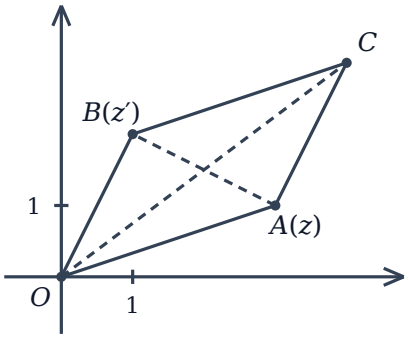
Exercice 9 – Développer un carré de module

a) Démontrer que pour tous complexes z et z' :

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$$

b) En déduire l'**identité du parallélogramme** : $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

c) Interpréter géométriquement le résultat du b).



Le parallélogramme OACB

Exercice 10 – Un cercle caché derrière une équation en z et son conjugué

Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z vérifiant

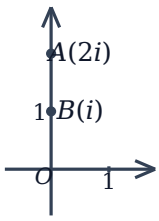
$$z\overline{z} - 2(z+\overline{z}) = 5$$

Exercice 11 – Quand le carré est imaginaire pur

Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z non nulle tels que z^2 soit imaginaire pur.

Exercice 12 – Un rapport de distances

Déterminer l'ensemble A des points M d'affixe z tels que $|z-2i| = 2|z-i|$.



Les points A et B d'affixes 2i et i

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Une suite de complexes

On définit la suite (z_n) par $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$. a) Calculer z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique.

b) Exprimer $|z_n|$ en fonction de n.

c) Déterminer le plus petit entier n tel que $|z_n| < 0{,}01$.

Exercice 14 – Somme des termes d'une suite de complexes

On reprend la suite de l'exercice précédent : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$. On pose $S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$. a) Exprimer z_n en fonction de n.

b) Calculer S_3 sous forme algébrique.

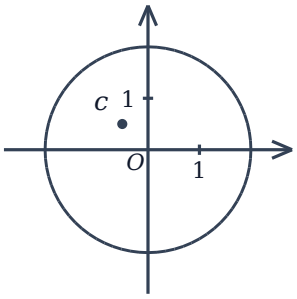
c) Donner une expression de S_n à l'aide de la somme des termes d'une suite géométrique.

Exercice 15 – Un test d'appartenance à l'ensemble de Mandelbrot

En infographie, l'**ensemble de Mandelbrot** se construit ainsi : pour un complexe c fixé, on définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + c$. On admet le critère suivant : si un module $|u_n|$ dépasse 2, la suite diverge et le point c est **hors** de l'ensemble ; sinon on continue les itérations. On prend $c = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$. a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 sous forme algébrique.

b) Calculer les modules correspondants, arrondis au millième. Le critère d'arrêt est-il déclenché ?

c) Un programme teste $c = 1$. Montrer que le critère est déclenché dès u_3.



Le point c et le cercle de rayon 2 du critère d'arrêt

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).