Plaquette 3 – Formules d'Euler : linéarisation, factorisation d'angle moitié et sommes

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Elles se lisent dans les deux sens : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$.

Formule de Moivre. Pour tout entier n :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Linéariser $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$. On remplace par Euler, on développe avec le binôme de Newton, on regroupe les termes conjugués deux à deux, puis on revient à des cosinus. Résultats à savoir retrouver :

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\cos^3\theta = \frac{3\cos\theta + \cos(3\theta)}{4} \qquad \sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}$$

Factorisation par l'angle moitié. C'est la technique la plus rentable du chapitre :

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Plus généralement :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$$

⚠ Le facteur $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est un **réel**, mais il peut être **négatif** : ce n'est alors pas le module, et il faut ajouter π à l'argument.

Somme géométrique de complexes de module 1. Pour θ non multiple de 2π :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

Racines n-ièmes de l'unité. Ce sont les n complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour k allant de 0 à $n-1$; leur somme est nulle dès que $n \geq 2$.

Correction de l'exercice 1 – Démontrer les formules d'Euler

On écrit la formule d'Euler pour θ et pour $-\theta$. Comme le cosinus est pair et le sinus impair,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

($e^{-i\theta}$ est le conjugué de $e^{i\theta}$). En ajoutant, les termes en $i\sin\theta$ s'éliminent : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, d'où $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$. En soustrayant, ce sont les cosinus qui

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

s'éliminent : $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$, d'où $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (le dénominateur est bien $2i$).

Contrôle en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{i + (-i)}{2} = 0 = \cos\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{i - (-i)}{2i} = 1 = \sin\dfrac{\pi}{2}$.

Réponse. En ajoutant puis en soustrayant $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Correction de l'exercice 2 – Linéariser un carré

On remplace $\cos\theta$ par sa formule d'Euler et l'on développe le carré ; le terme central vaut $2\,e^{i\theta}e^{-i\theta} = 2$:

$$\cos^2\theta = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{2\cos(2\theta) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

Pour le sinus, le dénominateur au carré vaut $(2i)^2 = -4$ et le numérateur $e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta} = 2\cos(2\theta) - 2$, d'où $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$. **Contrôle** : la somme des deux formules vaut bien 1. Elles donnent les primitives de $\cos^2$ et de $\sin^2$.

Réponse. $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ et $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – Linéariser un cube

On remplace $\sin\theta$ par $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Le dénominateur au cube vaut $(2i)^3 = -8i$. Le numérateur se développe avec $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, où $a = e^{i\theta}$ et $b = -e^{-i\theta}$:

$$e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta} = 2i\sin(3\theta) - 6i\sin\theta$$

en regroupant les termes extrêmes, puis les termes centraux. En divisant par $-8i$: $\sin^3\theta = \dfrac{\sin(3\theta) - 3\sin\theta}{-4} = \dfrac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}$. **Contrôle** en $\theta = \dfrac{\pi}{6}$: $\dfrac{1}{8}$ à gauche, et $\dfrac{1{,}5 - 1}{4} = 0{,}125$ à droite.

Réponse. $\sin^3\theta = \dfrac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}$.

Correction de l'exercice 4 – Linéariser une puissance quatrième

On écrit $\cos^4\theta = \dfrac{\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^4}{16}$ et l'on développe avec les coefficients binomiaux 1, 4, 6, 4, 1 :

$$\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^4 = e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta} = 2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6$$

En divisant par 16 : $\cos^4\theta = \dfrac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}$. **Contrôle** en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{4}$ à gauche, et $\dfrac{-1 + 0 + 3}{8} = \dfrac{1}{4}$ à droite. Linéariser une puissance n fait apparaître les angles $n\theta$, $(n-2)\theta$, et ainsi de suite.

Réponse. $\cos^4\theta = \dfrac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Un produit de carrés

Avec $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{2}$, on obtient $\cos^2\theta\sin^2\theta = \dfrac{\sin^2(2\theta)}{4}$, et l'on linéarise ce carré avec $\sin^2 u = \dfrac{1-\cos(2u)}{2}$ pour $u = 2\theta$:

$$\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{4}\times\frac{1-\cos(4\theta)}{2} = \frac{1-\cos(4\theta)}{8}$$

Par les formules d'Euler, on regroupe en $\left[\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right]^2 = \left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)^2 = 2\cos(4\theta)-2$, et l'on divise par $2^2\times(2i)^2 = -16$: on retrouve $\dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}$. **Contrôle** en $\theta = \frac{\pi}{4}$: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $\dfrac{1-\cos\pi}{8} = \dfrac{1}{4}$.

Réponse. $\cos^2\theta\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}$.

Correction de l'exercice 6 – Une intégrale rendue possible par la linéarisation

$\cos^2\theta$ n'a pas de primitive immédiate, mais sa forme linéarisée $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos(2\theta)}{2}$ s'intègre terme à terme, en $\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\sin(2\theta)}{4}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Contrôle : sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, les intégrales de $\cos^2$ et $\sin^2$ sont égales et leur somme vaut $\frac{\pi}{2}$. Pour la seconde, $\sin^3\theta = \dfrac{3\sin\theta-\sin(3\theta)}{4}$ a pour primitive $G(\theta) = -\dfrac{3\cos\theta}{4}+\dfrac{\cos(3\theta)}{12}$, et $G(\pi)-G(0) = \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\right) = \frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Ce résultat est plausible : la fonction est positive et ne dépasse pas 1 sur un intervalle de longueur π.

Réponse. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 7 – Factorisation par l'angle moitié

On met en facteur $e^{i\frac{\theta}{2}}$, la « moitié » de l'exposant : $1 = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}$ et $e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$, donc

$$1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

par la formule d'Euler. Si $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$, on lit directement le module $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et l'argument $\dfrac{\theta}{2}$; sinon, le module vaut $-2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et l'argument $\dfrac{\theta}{2}+\pi$. **Contrôle** pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $1+i = 2\cos\frac{\pi}{4}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Réponse. En mettant $e^{i\frac{\theta}{2}}$ en facteur : $1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Correction de l'exercice 8 – La différence, et son module

Même mise en facteur : $1-e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$. Comme $e^{ix}-e^{-ix} = 2i\sin x$, la parenthèse, écrite dans l'ordre inverse, vaut $-2i\sin\dfrac{\theta}{2}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$1 - \mathrm{e}^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$$

Le module d'un produit est le produit des modules : $|-2i| = 2$, $\left|\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 1$, et le module du réel $\sin\frac{\theta}{2}$ est sa valeur absolue. D'où $\left|1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$: c'est la longueur de la corde joignant le point 1 au point d'angle θ du cercle unité. **Contrôle** pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $|1 - i| = \sqrt{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}$.

Réponse. $1 - \mathrm{e}^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$, donc $\left|1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

Correction de l'exercice 9 – Somme de deux exponentielles

a) On met en facteur la « moyenne » des exposants, $\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$: il reste $\mathrm{e}^{i\frac{a-b}{2}}$ et $\mathrm{e}^{i\frac{b-a}{2}}$, donc

$$\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{a-b}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$$

Pour $b = 0$, on retrouve la formule de l'exercice 7.

b) On prend la partie réelle des deux membres. À gauche, on obtient $\cos a + \cos b$; à droite, le facteur $2\cos\frac{a-b}{2}$ est réel, et la partie réelle de $\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$ est $\cos\frac{a+b}{2}$. D'où $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$; la partie imaginaire donne de même $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. **Contrôle** pour $a = \frac{\pi}{3}$, $b = 0$: $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ et $2\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$.

Réponse. a) $\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$ · b) en prenant la partie réelle : $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 10 – Module et argument sans forme algébrique

On applique la factorisation $1 + \mathrm{e}^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$ avec $\theta = \frac{\pi}{3}$: le facteur réel vaut $2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} > 0$, c'est donc le module, et

$$Z = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$$

Vérification par la forme algébrique : $Z = 1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, de module $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$, avec $\cos\alpha = \frac{3/2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, donc $\alpha = \frac{\pi}{6}$. La factorisation a évité tout calcul de racine.

Réponse. $|Z| = \sqrt{3}$ et $\arg Z = \frac{\pi}{6}$, soit $Z = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Correction de l'exercice 11 – Une somme géométrique de complexes

a) S est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \mathrm{e}^{i\theta}$, différente de 1 puisque θ n'est pas un multiple de 2π. La formule du cours reste valable dans $\mathbb{C}$:

$$S = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - \mathrm{e}^{in\theta}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour $n = 6$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\mathrm{e}^{6i\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$: le numérateur est nul et le dénominateur ne l'est pas, donc $S = 0$. **Contrôle** : les six termes sont les racines sixièmes de l'unité, qui se regroupent en trois paires de nombres opposés (1 et -1, $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}$, $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}}$).

Réponse. a) $S = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{in\theta}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}}$ · b) $S = 0$.

Correction de l'exercice 12 – Somme des racines n-ièmes de l'unité

Les racines n-ièmes de l'unité sont $\omega_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = \omega_1^k$ pour $0 \le k \le n-1$: leur somme est géométrique de raison $\omega_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$, différente de 1 car $n \ge 2$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1} = \frac{1 - \mathrm{e}^{2i\pi}}{1 - \omega_1} = 0$$

Pour $n = 5$, la partie réelle d'une somme étant la somme des parties réelles, $\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$. **Contrôle** numérique : $1 + 0{,}309 - 0{,}809 - 0{,}809 + 0{,}309 = 0$. Géométriquement, les n points forment un polygone régulier centré à l'origine.

Réponse. La somme est géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$ et de numérateur $1 - \mathrm{e}^{i2\pi} = 0$, donc elle est nulle ; en prenant la partie réelle pour $n = 5$, la somme des cinq cosinus vaut 0.

Correction de l'exercice 13 – Transformer un produit en somme

On remplace chaque cosinus par sa formule d'Euler et l'on développe le produit des deux numérateurs :

$$\cos a \cos b = \frac{\mathrm{e}^{i(a+b)} + \mathrm{e}^{i(a-b)} + \mathrm{e}^{-i(a-b)} + \mathrm{e}^{-i(a+b)}}{4} = \frac{2\cos(a+b) + 2\cos(a-b)}{4}$$

ce qui donne $\cos a \cos b = \dfrac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$. Pour $a = \frac{5\pi}{12}$ et $b = \frac{\pi}{12}$, on a $a - b = \frac{\pi}{3}$ et $a + b = \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \frac{1}{4}$. **Contrôle** : $0{,}2588 \times 0{,}9659 \approx 0{,}250$.

Réponse. $\cos a \cos b = \dfrac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$, d'où $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 14 – Une équation trigonométrique par factorisation

On transforme la somme en produit avec la formule de l'exercice 9, pour $a = x$ et $b = 3x$: la demi-somme vaut $2x$ et la demi-différence $-x$, et $\cos(-x) = \cos x$. L'équation devient

$$2\cos(2x)\cos x = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est. $\cos(2x) = 0$ donne $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$: dans $[0\,;2\pi[$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. $\cos x = 0$ donne $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. **Contrôle** pour $x = \frac{\pi}{4}$: $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = 0$. Développer $\cos(3x)$ aurait conduit à une équation de degré 3 en $\cos x$.

Réponse. $2\cos(2x)\cos x = 0$, d'où $S = \left\{\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{2}\,;\frac{7\pi}{4}\right\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Battements de deux diapasons

a) On applique $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ avec $a = 2\pi f_1 t$ et $b = 2\pi f_2 t$. La demi-somme correspond à la fréquence $\frac{440+444}{2} = 442$ Hz et la demi-différence à $\frac{440-444}{2} = -2$ Hz ; le cosinus étant pair, on garde 2 Hz :

$$p(t) = 2\cos(2\pi \times 2t)\cos(2\pi \times 442t)$$

b) L’enveloppe a une période de $\frac{1}{2}$ s, mais |cos| a une période deux fois plus courte : les maxima d’intensité reviennent toutes les 0,25 s, soit 4 battements par seconde. On retrouve la règle : le nombre de battements par seconde est $|f_1 - f_2|$.

c) Pour supprimer les battements, il faut $|f_1 - f_2| = 0$: le musicien vise 440 Hz. L’oreille distingue mal deux hauteurs proches, mais compte très bien des battements lents.

Réponse. a) $p(t) = 2\cos(2\pi \times 2t)\cos(2\pi \times 442t)$, porteuse à 442 Hz, enveloppe à 2 Hz · b) 4 battements par seconde, soit $|f_1 - f_2|$ · c) 440 Hz.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).