

Plaque 3 – Formules d'Euler : linéarisation, factorisation d'angle moitié et sommes

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Elles se lisent dans les deux sens : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$.

Formule de Moivre. Pour tout entier n :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{c'est-à-dire} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Linéariser $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$. On remplace par Euler, on développe avec le binôme de Newton, on regroupe les termes conjugués deux à deux, puis on revient à des cosinus. Résultats à savoir retrouver :

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} & \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \\ \cos^3 \theta &= \frac{3 \cos \theta + \cos(3\theta)}{4} & \sin^3 \theta &= \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4} \end{aligned}$$

Factorisation par l'angle moitié. C'est la technique la plus rentable du chapitre :

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \quad 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Plus généralement :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

△ Le facteur $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est un **réel**, mais il peut être **négatif** : ce n'est alors pas le module, et il faut ajouter π à l'argument.

Somme géométrique de complexes de module 1. Pour θ non multiple de 2π :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

Racines n -ièmes de l'unité. Ce sont les n complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour k allant de 0 à $n-1$; leur somme est nulle dès que $n \geq 2$.

Correction de l'exercice 1 – Démontrer les formules d'Euler

- **Point de départ** : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ✓
- **Deuxième relation** : on remplace θ par $-\theta$ ✓
- **Parités** : $\cos(-\theta) = \cos \theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ ✓
- **Donc** :

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

- **Remarque** : $e^{-i\theta}$ est donc le **conjugué** de $e^{i\theta}$ ✓
- **Somme des deux égalités** : les termes en $i \sin \theta$ se compensent ✓
- **Calcul** : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ ✓
- **Première formule d'Euler** :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

- **Différence des deux égalités** : les termes en $\cos \theta$ se compensent ✓
- **Calcul** : $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$ ✓
- **Seconde formule d'Euler** :

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- **Attention au dénominateur** : c'est $2i$ et non 2 ✓
- **Écriture équivalente** : en multipliant par $\frac{i}{i}$, on obtient $\sin \theta = \frac{i(e^{-i\theta} - e^{i\theta})}{2}$ ✓
- **Contrôle en $\theta = 0$** : $\frac{1+1}{2} = 1 = \cos 0$ ✓
- **Second contrôle** : $\frac{1-1}{2i} = 0 = \sin 0$ ✓
- **Contrôle en $\theta = \frac{\pi}{2}$** : $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ ✓
- **Vérification** : $\cos \frac{\pi}{2} = \frac{i-i}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = \frac{i+i}{2i} = 1$ ✓

Réponse. En ajoutant puis en soustrayant $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$:
 $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Correction de l'exercice 2 - Linéariser un carré

- **Substitution d'Euler** : $\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2$ ✓
- **Carré du dénominateur** : 4 ✓
- **Développement du numérateur** : $(e^{i\theta})^2 + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2$ ✓
- **Premier terme** : $e^{2i\theta}$ ✓
- **Terme central** : $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$, donc ce terme vaut 2 ✓
- **Troisième terme** : $e^{-2i\theta}$ ✓
- **Regroupement** : $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2 \cos(2\theta)$ ✓
- **Expression** : $\cos^2 \theta = \frac{2 \cos(2\theta) + 2}{4}$ ✓
- **Résultat** :

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

- **Même travail pour le sinus** : $\sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2$ ✓
- **Carré du dénominateur** : $(2i)^2 = -4$ ✓
- **Numérateur** : $e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta} = 2 \cos(2\theta) - 2$ ✓
- **Quotient** : $\frac{2 \cos(2\theta) - 2}{-4}$ ✓
- **Résultat** :

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

- **Contrôle par la somme** : $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta + 1 - \cos 2\theta}{2} = 1 \quad \checkmark$
 - **Contrôle en $\theta = 0$** : $\frac{1+1}{2} = 1$ et $\frac{1-1}{2} = 0 \quad \checkmark$
 - **Application immédiate** : ces deux formules donnent les primitives de $\cos^2$ et $\sin^2 \quad \checkmark$
- Réponse.** $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ et $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.

Correction de l'exercice 3 - Linéariser un cube

- **Substitution** : $\sin^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \quad \checkmark$
- **Cube du dénominateur** : $(2i)^3 = 8i^3 = -8i \quad \checkmark$
- **Développement du numérateur, binôme de Newton** : avec $a = e^{i\theta}$ et $b = -e^{-i\theta} \quad \checkmark$
- **Formule** : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \checkmark$
- **Premier terme** : $e^{3i\theta} \quad \checkmark$
- **Deuxième terme** : $3e^{2i\theta} \times (-e^{-i\theta}) = -3e^{i\theta} \quad \checkmark$
- **Troisième terme** : $3e^{i\theta} \times e^{-2i\theta} = 3e^{-i\theta} \quad \checkmark$
- **Quatrième terme** : $-e^{-3i\theta} \quad \checkmark$
- **Regroupement des termes extrêmes** : $e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} = 2i \sin(3\theta) \quad \checkmark$
- **Regroupement des termes centraux** : $-3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = -6i \sin \theta \quad \checkmark$
- **Numérateur total** : $2i \sin(3\theta) - 6i \sin \theta \quad \checkmark$
- **Quotient** : $\frac{2i \sin(3\theta) - 6i \sin \theta}{-8i} \quad \checkmark$
- **On simplifie par $2i$** : $\frac{\sin(3\theta) - 3 \sin \theta}{-4} \quad \checkmark$
- **Résultat** :

$$\sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4}$$

- **Contrôle en $\theta = \frac{\pi}{2}$** : membre de gauche $1^3 = 1 \quad \checkmark$
- **Membre de droite** : $\frac{3 \times 1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{4} = \frac{3+1}{4} = 1 \quad \checkmark$
- **Contrôle en $\theta = \frac{\pi}{6}$** : membre de gauche $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \checkmark$
- **Membre de droite** : $\frac{3 \times \frac{1}{2} - \sin \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{1,5 - 1}{4} = 0,125 \quad \checkmark$

Réponse. $\sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4}$.

Correction de l'exercice 4 - Linéariser une puissance quatrième

- **Substitution** : $\cos^4 \theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4}{16} \quad \checkmark$
- **Binôme de Newton, coefficients** : 1, 4, 6, 4, 1 $\checkmark$
- **Premier terme** : $e^{4i\theta} \quad \checkmark$
- **Deuxième terme** : $4e^{3i\theta}e^{-i\theta} = 4e^{2i\theta} \quad \checkmark$

- **Terme central** : $6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} = 6 \checkmark$
- **Quatrième terme** : $4e^{i\theta}e^{-3i\theta} = 4e^{-2i\theta} \checkmark$
- **Cinquième terme** : $e^{-4i\theta} \checkmark$
- **Regroupement des extrêmes** : $e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} = 2\cos(4\theta) \checkmark$
- **Regroupement des seconds** : $4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) = 8\cos(2\theta) \checkmark$
- **Numérateur total** : $2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6 \checkmark$
- **Division par 16** : on simplifie par 2 $\checkmark$
- **Résultat** :

$$\cos^4 \theta = \frac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}$$

- **Contrôle en $\theta = 0$** : membre de gauche 1 $\checkmark$
- **Membre de droite** : $\frac{1+4+3}{8} = 1 \checkmark$
- **Contrôle en $\theta = \frac{\pi}{2}$** : membre de gauche 0 $\checkmark$
- **Membre de droite** : $\frac{\cos(2\pi) + 4\cos\pi + 3}{8} = \frac{1-4+3}{8} = 0 \checkmark$
- **Contrôle en $\theta = \frac{\pi}{4}$** : membre de gauche $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} \checkmark$
- **Membre de droite** : $\frac{\cos\pi + 4\cos\frac{\pi}{2} + 3}{8} = \frac{-1+0+3}{8} = \frac{1}{4} \checkmark$
- **Règle générale observée** : linéariser une puissance n fait apparaître les angles $n\theta$, $(n-2)\theta$, $(n-4)\theta$, etc. $\checkmark$

Réponse. $\cos^4 \theta = \frac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}$.

Correction de l'exercice 5 - Un produit de carrés

- **Deuxième méthode, la plus rapide** : $\sin \theta \cos \theta = \frac{\sin(2\theta)}{2} \checkmark$
- **On élève au carré** : $\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{\sin^2(2\theta)}{4} \checkmark$
- **On linéarise le carré** : $\sin^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{2}$ avec $u = 2\theta \checkmark$
- **Substitution** : $\frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} \checkmark$
- **Résultat** :

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(4\theta)}{8}$$

- **Première méthode, par Euler** : on écrit le produit des deux expressions $\checkmark$
- **Numérateur** : $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2 \checkmark$
- **Astuce** : on regroupe autrement, en $\left[(e^{i\theta} + e^{-i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\right]^2 \checkmark$
- **Identité remarquable** : le produit vaut $e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} \checkmark$
- **Carré** : $e^{4i\theta} - 2 + e^{-4i\theta} = 2\cos(4\theta) - 2 \checkmark$
- **Dénominateur** : $2^2 \times (2i)^2 = 4 \times (-4) = -16 \checkmark$
- **Quotient** : $\frac{2\cos(4\theta) - 2}{-16} \checkmark$
- **Résultat** : $\frac{1 - \cos(4\theta)}{8} \checkmark$

- **Cohérence** : les deux méthodes donnent la même expression ✓
- **Contrôle en** $\theta = \frac{\pi}{4}$: membre de gauche $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ✓
- **Membre de droite** : $\frac{1 - \cos \pi}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ✓
- **Contrôle en** $\theta = 0$: 0 des deux côtés ✓
- **Valeur maximale** : $\frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4}$, atteinte quand $\cos(4\theta) = -1$ ✓

Réponse. $\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(4\theta)}{8}$.

Correction de l'exercice 6 - Une intégrale rendue possible par la linéarisation

- **Obstacle** : $\cos^2 \theta$ n'a pas de primitive immédiate ✓
- **On linéarise** : $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ ✓
- **Primitive terme à terme** : celle de $\frac{1}{2}$ est $\frac{\theta}{2}$ ✓
- **Celle de** $\frac{\cos(2\theta)}{2}$: $\frac{\sin(2\theta)}{4}$ ✓
- **Primitive complète** : $F(\theta) = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}$ ✓
- **Valeur en** $\frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ ✓
- **Valeur en** 0 : 0 ✓
- **Résultat** :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{4}$$

- **Contrôle par symétrie** : sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, les intégrales de $\cos^2$ et de $\sin^2$ sont égales ✓
- **Justification** : leur somme vaut $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta = \frac{\pi}{2}$ ✓
- **Cohérence** : chacune vaut donc la moitié, soit $\frac{\pi}{4}$ ✓
- **Seconde intégrale** : on linéarise $\sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4}$ ✓
- **Primitive de** $\frac{3 \sin \theta}{4}$: $-\frac{3 \cos \theta}{4}$ ✓
- **Primitive de** $-\frac{\sin(3\theta)}{4}$: $\frac{\cos(3\theta)}{12}$ ✓
- **Primitive complète** : $G(\theta) = -\frac{3 \cos \theta}{4} + \frac{\cos(3\theta)}{12}$ ✓
- **Valeur en** π : $-\frac{3 \times (-1)}{4} + \frac{\cos(3\pi)}{12} = \frac{3}{4} - \frac{1}{12}$ ✓
- **Calcul** : $\frac{9}{12} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Valeur en** 0 : $-\frac{3}{4} + \frac{1}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$ ✓
- **Résultat** :

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

- **Contrôle de plausibilité** : $\sin^3 \theta$ est positif sur $[0; \pi]$, de maximum 1 ✓
- **Encadrement** : l'intégrale est comprise entre 0 et $\pi \approx 3,14$, et $\frac{4}{3} \approx 1,33$ ✓

Réponse. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 7 – Factorisation par l'angle moitié

- **Idée** : faire apparaître une somme du type $e^{ix} + e^{-ix}$ ✓
- **On met $e^{i\frac{\theta}{2}}$ en facteur** : c'est « la moitié » de l'exposant présent ✓
- **Écriture de 1** : $1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}}$ ✓
- **Écriture de $e^{i\theta}$** : $e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$ ✓
- **Mise en facteur** :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right)$$

- **Reconnaissance d'Euler** : la parenthèse vaut $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ✓
- **Résultat** :

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

- **Lecture du module** : si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$, le module vaut $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et l'argument $\frac{\theta}{2}$ ✓
- **Avertissement** : si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$, le module est $-2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et l'argument $\frac{\theta}{2} + \pi$ ✓
- **Exemple du premier cas** : $\theta = \frac{\pi}{2}$ ✓
- **Calcul** : $1 + i = 2 \cos \frac{\pi}{4} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien la forme exponentielle connue de $1 + i$ ✓
- **Exemple du second cas** : $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ✓
- **Calcul** : $1 - i = 2 \cos \frac{3\pi}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ✓
- **Argument corrigé** : $\frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}$, équivalent à $-\frac{\pi}{4}$ ✓
- **Cohérence** : $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ✓

Réponse. En mettant $e^{i\frac{\theta}{2}}$ en facteur : $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Correction de l'exercice 8 – La différence, et son module

- **Même mise en facteur** : $e^{i\frac{\theta}{2}}$ ✓
 - **Écriture** :
- $$1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right)$$
- **Reconnaissance d'Euler** : $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$ ✓
 - **Attention à l'ordre** : ici c'est $e^{-ix} - e^{ix}$, donc l'**opposé** ✓
 - **Valeur de la parenthèse** : $-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ✓
 - **Résultat** :

$$1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

- **Passage au module** : le module d'un produit est le produit des modules ✓
- **Module de $-2i$** : 2 ✓

- **Module de $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$** : c'est un réel, son module est sa **valeur absolue** ✓
- **Module de $e^{i\frac{\theta}{2}}$** : 1 ✓
- **Résultat** :

$$|1 - e^{i\theta}| = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|$$

- **Contrôle en $\theta = \pi$** : $|1 - (-1)| = 2$ ✓
- **Formule** : $2 \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = 2$ ✓
- **Contrôle en $\theta = \frac{\pi}{2}$** : $|1 - i| = \sqrt{2}$ ✓
- **Formule** : $2 \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ ✓
- **Contrôle en $\theta = 0$** : $|1 - 1| = 0$ ✓
- **Formule** : $2 |\sin 0| = 0$ ✓
- **Interprétation géométrique** : c'est la longueur de la corde qui joint le point 1 au point d'angle θ sur le cercle unité ✓

Réponse. $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$, donc $|1 - e^{i\theta}| = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|$.

Correction de l'exercice 9 - Somme de deux exponentielles

- **a) Mise en facteur** : on sort $e^{i\frac{a+b}{2}}$, la « moyenne » des deux exposants ✓
- **Premier terme** : $e^{ia} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times e^{i(a - \frac{a+b}{2})}$ ✓
- **Exposant restant** : $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$ ✓
- **Second terme** : $e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times e^{i(b - \frac{a+b}{2})}$ ✓
- **Mise en facteur** :

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$$

- **Euler** : la parenthèse vaut $2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ✓
- **Résultat démontré** ✓
- **Cas particulier** : pour $b = 0$, on retrouve la formule de l'exercice 7 ✓
- **b) Méthode** : prendre la **partie réelle** des deux membres ✓
- **Membre de gauche** : $\operatorname{Re}(e^{ia} + e^{ib}) = \cos a + \cos b$ ✓
- **Membre de droite** : $2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ est un **réel**, il sort de la partie réelle ✓
- **Partie réelle restante** : $\operatorname{Re}(e^{i\frac{a+b}{2}}) = \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ✓
- **Formule obtenue** :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

- **Bonus, par la partie imaginaire** : $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ✓
- **Contrôle** : pour $a = b$, la formule donne $2 \cos a$ ✓
- **Cohérence** : $\cos a + \cos a = 2 \cos a$ ✓
- **Second contrôle** : $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = 0$ ✓
- **Membre de gauche** : $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ ✓

— **Membre de droite** : $2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \checkmark$

Réponse. a) $e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i \frac{a+b}{2}}$. b) en prenant la partie réelle :
 $\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$.

Correction de l'exercice 10 - Module et argument sans forme algébrique

— **Outil** : $1 + e^{i\theta} = 2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i \frac{\theta}{2}} \checkmark$

— **Ici** : $\theta = \frac{\pi}{3}$, donc $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \checkmark$

— **Facteur réel** : $2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$

— **Valeur** : $\sqrt{3} \checkmark$

— **Signe** : $\sqrt{3} > 0$, c'est donc bien le module $\checkmark$

— **Forme exponentielle** :

$$Z = \sqrt{3} e^{i \frac{\pi}{6}}$$

— **Conclusion** : $|Z| = \sqrt{3} \approx 1,732$ et $\arg Z = \frac{\pi}{6} \checkmark$

— **Vérification par la forme algébrique** : $e^{i \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$

— **Somme** : $1 + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$

— **Forme algébrique** :

$$Z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

— **Module** : $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} \checkmark$

— **Calcul** : $\sqrt{3} \checkmark$

— **Cohérence** : conforme au premier calcul $\checkmark$

— **Argument** : $\cos \alpha = \frac{3/2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$

— **Sinus** : $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \checkmark$

— **Angle** : $\alpha = \frac{\pi}{6} \checkmark$

— **Cohérence** : les deux méthodes concordent, et la première n'a demandé aucun calcul de racine $\checkmark$

Réponse. $|Z| = \sqrt{3}$ et $\arg Z = \frac{\pi}{6}$, soit $Z = \sqrt{3} e^{i \frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Correction de l'exercice 11 - Une somme géométrique de complexes

— **a) Nature de la somme** : c'est une somme géométrique de raison $q = e^{i\theta} \checkmark$

— **Condition de validité** : $q \neq 1$, c'est-à-dire θ non multiple de 2π , ce qui est supposé $\checkmark$

— **Premier terme** : $e^{i \times 0} = 1 \checkmark$

— **Nombre de termes** : $n \checkmark$

— **Formule du cours** :

$$S = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

- **Justification** : la formule est valable dans tout corps, donc dans $\mathbb{C}$ ✓
- **b) Valeur de la raison** : $q = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ✓
- **Puissance sixième** : $q^6 = e^{i \times 6 \times \frac{\pi}{3}} = e^{i2\pi}$ ✓
- **Valeur** : $e^{i2\pi} = 1$ ✓
- **Numérateur** : $1 - 1 = 0$ ✓
- **Dénominateur** : $1 - e^{i\frac{\pi}{3}} \neq 0$ ✓
- **Résultat** :

$$S = 0$$

- **Interprétation** : les six termes sont les **racines sixièmes de l'unité**, leur somme est nulle ✓
- **Vérification directe, termes deux à deux opposés** : $e^{i0} = 1$ et $e^{i\pi} = -1$ ✓
- **Deuxième paire** : $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Troisième paire** : $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Somme** : chaque paire donne 0 ✓
- **Cohérence** : le total est bien nul ✓
- **Piège** : pour θ multiple de 2π , tous les termes valent 1 et $S = n$, pas 0 ✓

Réponse. a) $S = \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ · b) $S = 0$.

Correction de l'exercice 12 - Somme des racines n-ièmes de l'unité

- **Les racines n-ièmes de l'unité** : ce sont les $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour k de 0 à $n - 1$ ✓
- **Observation clé** : $\omega_k = (\omega_1)^k$ avec $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ✓
- **La somme est donc géométrique** de raison ω_1 ✓
- **Condition** : $\omega_1 \neq 1$, ce qui est vrai car $n \geq 2$ ✓
- **Formule** :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1}$$

- **Numérateur** : $\omega_1^n = e^{i2\pi} = 1$, donc le numérateur est nul ✓
- **Dénominateur** : non nul ✓
- **Conclusion** :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$$

- **Application à $n = 5$** : les cinq racines sont $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ pour k de 0 à 4 ✓
- **Leur somme est nulle** ✓
- **On prend la partie réelle** : la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles ✓
- **Partie réelle de $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$** : $\cos \frac{2k\pi}{5}$ ✓
- **Résultat** :

$$\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$$

- **Contrôle numérique** : $1 + 0,309 - 0,809 - 0,809 + 0,309$ ✓
- **Somme** : $1 + 0,618 - 1,618 = 0$ ✓

- **Bonus** : la partie imaginaire donne de même $\sum_{k=0}^4 \sin \frac{2k\pi}{5} = 0$ ✓
- **Interprétation géométrique** : les n points forment un polygone régulier, dont le centre de gravité est l'origine ✓

Réponse. La somme est géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$ et de numérateur $1 - e^{i2\pi} = 0$, donc elle est nulle ; en prenant la partie réelle pour $n = 5$, la somme des cinq cosinus vaut 0.

Correction de l'exercice 13 - Transformer un produit en somme

- **Substitution** : $\cos a \cos b = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \times \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}$ ✓
- **Dénominateur** : 4 ✓
- **Développement, premier terme** : $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$ ✓
- **Deuxième terme** : $e^{ia}e^{-ib} = e^{i(a-b)}$ ✓
- **Troisième terme** : $e^{-ia}e^{ib} = e^{-i(a-b)}$ ✓
- **Quatrième terme** : $e^{-ia}e^{-ib} = e^{-i(a+b)}$ ✓
- **Regroupement des termes en $a + b$** : $e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} = 2 \cos(a+b)$ ✓
- **Regroupement des termes en $a - b$** : $2 \cos(a-b)$ ✓
- **Numérateur total** : $2 \cos(a+b) + 2 \cos(a-b)$ ✓
- **Division par 4** :

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

- **Application numérique** : $a = \frac{5\pi}{12}$ et $b = \frac{\pi}{12}$ ✓
- **Différence** : $\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$ ✓
- **Somme** : $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ ✓
- **Valeurs** : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ✓
- **Résultat** :

$$\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \frac{1}{4}$$

- **Contrôle numérique** : $\cos \frac{5\pi}{12} \approx 0,2588$ et $\cos \frac{\pi}{12} \approx 0,9659$ ✓
- **Produit** : $0,2588 \times 0,9659 \approx 0,250$ ✓
- **Cohérence** : le produit vaut bien $\frac{1}{4}$ ✓

Réponse. $\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$, d'où $\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 14 - Une équation trigonométrique par factorisation

- **Outil** : la formule de somme démontrée à l'exercice 9 ✓
- **Formule** : $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ✓
- **Ici** : $a = x$ et $b = 3x$ ✓
- **Demi-somme** : $\frac{x+3x}{2} = 2x$ ✓
- **Demi-différence** : $\frac{x-3x}{2} = -x$ ✓

— **Parité** : $\cos(-x) = \cos x$ ✓

— **Équation factorisée** :

$$2 \cos(2x) \cos x = 0$$

— **Produit nul** : $\cos(2x) = 0$ ou $\cos x = 0$ ✓

— **Premier facteur** : $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ✓

— **Donc** : $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ✓

— **Valeurs dans** $[0; 2\pi[$: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ ✓

— **Second facteur** : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ✓

— **Valeurs dans** $[0; 2\pi[$: $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ ✓

— **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

— **Vérification pour** $x = \frac{\pi}{4}$: $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

— **Et** : $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

— **Somme** : 0 ✓

— **Vérification pour** $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ ✓

— **Somme** : 0 ✓

— **Intérêt de la méthode** : développer $\cos(3x)$ avec $4 \cos^3 x - 3 \cos x$ conduirait à une équation de degré 3 en $\cos x$ ✓

Réponse. $2 \cos(2x) \cos x = 0$, d'où $S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4} \right\}$.

Correction de l'exercice 15 - Battements de deux diapasons

— **a) Outil** : $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ✓

— **Identification** : $a = 2\pi f_1 t$ et $b = 2\pi f_2 t$ ✓

— **Demi-somme** : $\frac{a+b}{2} = 2\pi \times \frac{f_1 + f_2}{2} \times t$ ✓

— **Fréquence de la porteuse** : $f_p = \frac{440 + 444}{2}$ ✓

— **Calcul** : 442 Hz ✓

— **Demi-différence** : $\frac{a-b}{2} = 2\pi \times \frac{f_1 - f_2}{2} \times t$ ✓

— **Fréquence de l'enveloppe** : $\frac{440 - 444}{2} = -2$ Hz ✓

— **Parité du cosinus** : $\cos(-u) = \cos u$, on garde $f_e = 2$ Hz ✓

— **Écriture obtenue** :

$$p(t) = 2 \cos(2\pi \times 2 \times t) \cos(2\pi \times 442 \times t)$$

— **b) Période de l'enveloppe** : $T_e = \frac{1}{f_e} = 0,5$ s ✓

— **Attention** : c'est $|\cos|$ qui compte, et sa période est **deux fois plus courte** ✓

— **Période des maxima** : 0,25 s ✓

— **Nombre de battements par seconde** : $\frac{1}{0,25}$ ✓

— **Résultat :**

4 battements par seconde

- **Règle générale retrouvée :** le nombre de battements par seconde vaut $|f_1 - f_2|$ ✓
- **Vérification :** $|440 - 444| = 4$ ✓
- **c) Condition d'accord :** plus aucun battement, donc $|f_1 - f_2| = 0$ ✓
- **Conclusion :** le musicien doit viser $f_2 = f_1 = 440$ Hz ✓
- **Remarque pratique :** c'est précisément ce qui rend la méthode efficace ✓
- **Justification :** l'oreille distingue mal deux hauteurs proches, mais compte très bien des battements lents ✓
- **Ordre de grandeur :** un écart de 0,5 Hz donne un battement toutes les deux secondes, parfaitement audible ✓

Réponse. a) $p(t) = 2 \cos(2\pi \times 2t) \cos(2\pi \times 442t)$, porteuse à 442 Hz, enveloppe à 2 Hz ·
b) 4 battements par seconde, soit $|f_1 - f_2|$ · c) 440 Hz.