Plaquette 1 – Module, argument, forme exponentielle et formules d'Euler

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- **Forme trigonométrique** : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z| > 0$ et $\theta = \arg(z)$ (défini modulo 2π).
- **Forme exponentielle** : $z = re^{i\theta}$, avec $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- Passage depuis la forme algébrique $z = a + ib$: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$.
- **Produit et quotient** :

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

- **Formule de Moivre** : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, donc $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
- **Formules d'Euler** :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- Conjugué et inverse : $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ et $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.
- **Racines n-ièmes de l'unité** : les solutions de $z^n = 1$ sont $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$; leur somme est nulle pour $n \geq 2$.
- Valeurs de référence : $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

Correction de l'exercice 1 – Module et argument

- a) $r = \sqrt{1+3} = 2$. Puis $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.
- b) $r = 2$; le point image est sur l'axe réel négatif, donc $\theta = \pi$.
- c) $r = 3$; le point est sur l'axe imaginaire négatif, donc $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{3\pi}{2}$).
- **Méthode** : on calcule toujours r **avant** l'argument, puisque $\cos\theta$ et $\sin\theta$ s'obtiennent en divisant par r.

Réponse. a) 2 et $\frac{\pi}{3}$ · b) 2 et π · c) 3 et $-\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2 – Forme exponentielle

a) $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

- $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$: l'argument est dans le **deuxième** quadrant, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

$$z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

b) $r = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

$$z' = 6\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$$

Réponse. a) $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$ · b) $6\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$.

Correction de l’exercice 3 – Retour à la forme algébrique

On utilise $r\mathrm{e}^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

a) $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$4\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2i\sqrt{3}$$

b) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$$

Réponse. a) $-2 + 2i\sqrt{3}$ · b) $1 - i$.

Correction de l’exercice 4 – Produit et quotient

Règles du cours : les modules se multiplient (ou se divisent), les arguments s’ajoutent (ou se soustraient).

— Produit : modules $2 \times 3 = 6$; arguments $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi + 2\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12}$.

$$zz' = 6\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}}$$

— Quotient : modules $\dfrac{2}{3}$; arguments $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$.

$$\frac{z}{z'} = \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$$

Réponse. $zz' = 6\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}}$ et $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$.

Correction de l’exercice 5 – Formule de Moivre

— On a vu que $1 + i\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

— Formule de Moivre : $\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = r^n\mathrm{e}^{in\theta}$.

$$\left(2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 2^6\,\mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{3}} = 64\,\mathrm{e}^{i2\pi} = 64$$

— Le résultat est **réel** : $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^6 = 64$.

— Contrôle du module : $\left|1 + i\sqrt{3}\right|^6 = 2^6 = 64$. Cohérent. Le calcul direct par développement serait beaucoup plus long.

Réponse. 64.

Correction de l’exercice 6 – Calcul d’un argument par le quotient

a) $1 + i$: module $\sqrt{2}$, argument $\dfrac{\pi}{4}$, donc $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

— $\sqrt{3} + i$: module $\sqrt{3+1} = 2$; $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, donc argument $\dfrac{\pi}{6}$ et écriture $2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On divise les modules et on soustrait les arguments :

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\,i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\,i\frac{\pi}{12}}$$

— Donc $|Z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ et $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{12}$ (soit 15°).

— Application classique : cela permet d'obtenir $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$ en repassant à la forme algébrique.

Réponse. b) $|Z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{12}$.

Correction de l'exercice 7 – Conjugué et inverse

— **Conjugué** : on change le signe de l'argument, le module ne change pas : $\overline{z} = 5\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}}$.

— **Inverse** : on inverse le module et on change le signe de l'argument : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}}$.

— **Opposé** : $-1 = \mathrm{e}^{\,i\pi}$, donc $-z = 5\mathrm{e}^{\,i\left(\frac{2\pi}{5}+\pi\right)} = 5\mathrm{e}^{\,i\frac{7\pi}{5}}$.

— Contrôle : $\dfrac{2\pi}{5} + \pi = \dfrac{2\pi + 5\pi}{5} = \dfrac{7\pi}{5}$. Correct.

Réponse. $\overline{z} = 5\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}}$; $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}}$; $-z = 5\mathrm{e}^{\,i\frac{7\pi}{5}}$.

Correction de l'exercice 8 – Formules d'Euler

a) Formules d'Euler du cours :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\,i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\,i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

b) En multipliant les égalités précédentes :

— $\mathrm{e}^{\,i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos\theta$.

— $\mathrm{e}^{\,i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta} = 2i\sin\theta$.

— Démonstration : $\mathrm{e}^{\,i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ (par parité du cosinus et imparité du sinus). En ajoutant, les parties imaginaires s'annulent ; en soustrayant, ce sont les parties réelles.

Réponse. b) $2\cos\theta$ et $2i\sin\theta$.

Correction de l'exercice 9 – Linéarisation

On part de la formule d'Euler et on élève au carré.

— $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\,i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$, donc

$$\cos^2\theta = \frac{\left(\mathrm{e}^{\,i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}\right)^2}{4} = \frac{\mathrm{e}^{\,2i\theta} + 2\,\mathrm{e}^{\,i\theta}\mathrm{e}^{-i\theta} + \mathrm{e}^{-2i\theta}}{4}$$

— Or $\mathrm{e}^{\,i\theta}\mathrm{e}^{-i\theta} = \mathrm{e}^{0} = 1$, donc le numérateur vaut $\mathrm{e}^{2i\theta} + \mathrm{e}^{-2i\theta} + 2$.

— D'après la question précédente, $\mathrm{e}^{2i\theta} + \mathrm{e}^{-2i\theta} = 2\cos(2\theta)$.

$$\cos^2\theta = \frac{2\cos(2\theta) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

— Contrôle pour $\theta = 0$: $\cos^2 0 = 1$ et $\dfrac{1+1}{2} = 1$. Cohérent.

Réponse. $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Racines carrées d'un complexe

On cherche $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ tel que $r^2\mathrm{e}^{2i\theta} = 4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

— Modules : $r^2 = 4$, donc $r = 2$ (le module est positif).
— Arguments : $2\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.
— Pour $k = 0$: $z_1 = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$. Pour $k = 1$: $z_2 = 2\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}} = -z_1$.
— Les deux solutions sont **opposées**, ce qui est toujours le cas pour une équation $z^2 = a$.

Réponse. $z = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z = 2\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Correction de l'exercice 11 – Racines cubiques de l'unité

a) On écrit $1 = \mathrm{e}^{i\times 0}$ et on cherche $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$:

— Modules : $r^3 = 1$, donc $r = 1$.
— Arguments : $3\theta = 2k\pi$, donc $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$ pour $k = 0, 1, 2$.
— Solutions : $z_0 = 1$, $z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Somme : $1 + \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - 1 + 0i = 0$.

— La somme est bien nulle : c'est une propriété générale des racines n-ièmes de l'unité pour $n \geq 2$.
— Géométriquement, les trois points forment un **triangle équilatéral** inscrit dans le cercle unité.

Réponse. a) 1 ; $-\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ · b) somme nulle.

Correction de l'exercice 12 – Lire module et argument sur une figure

On lit $M(-2\,;2)$, donc $z = -2 + 2i$. Le module est la distance OM :

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Un argument θ vérifie $\cos\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: le point est dans le deuxième quadrant et $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$. Donc $z = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$. **Contrôle** : $2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i$.

On voit d'ailleurs sur la figure que (OM) est la bissectrice du deuxième quadrant.

Réponse. $z = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Correction de l'exercice 13 – Multiplier par i : un quart de tour

a) $z_B = i(2 + 2i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i$.

b) $z_A = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et $i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$; en multipliant, les modules se multiplient et les arguments s'ajoutent :

$$z_B = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \times 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$$

B est à la même distance de O que A, et son argument a augmenté de $\dfrac{\pi}{2}$: B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. **Contrôle** : $OA = OB = 2\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{OA}(2\,;2)$, $\overrightarrow{OB}(-2\,;2)$ ont un produit scalaire nul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $z_B = -2 + 2i$ · b) $z_A = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_B = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$: rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Quand une puissance est-elle réelle ?

On a $|z| = \sqrt{3+1} = 2$, et $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ donnent $\theta = \frac{\pi}{6}$: $z = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$. Par la formule de Moivre,

$$z^n = 2^n\,\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{6}}$$

z^n est réel lorsque son argument vaut 0 ou π modulo 2π, c'est-à-dire lorsque $\frac{n\pi}{6} = k\pi$ avec k entier : n doit être un multiple de 6. Pour $n = 6$, $z^6 = 2^6\,\mathrm{e}^{i\pi} = -64$. **Contrôle** : $z^2 = 3 + 2i\sqrt{3} - 1 = 2 + 2i\sqrt{3}$, $z^3 = (2 + 2i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 8i$ et $z^6 = (8i)^2 = -64$.

Réponse. z^n est réel si et seulement si n est un multiple de 6 ; $z^6 = -64$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : puissance et forme algébrique

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, donc $|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$.

— $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Moivre : $z^8 = \mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{4}} = \mathrm{e}^{i2\pi} = 1$.

c) $z^{2026} = \mathrm{e}^{i\frac{2026\pi}{4}}$. On réduit l'argument modulo 2π :

— $\frac{2026}{8} = 253{,}25$, donc $2026 = 8 \times 253 + 2$, et $\frac{2026\pi}{4} = 506\pi + \frac{\pi}{2}$.

— Comme $506\pi = 253 \times 2\pi$ est un multiple de 2π, il reste $z^{2026} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

— Contrôle : le module vaut $1^{2026} = 1$, ce qui est bien le module de i.

Réponse. a) $|z| = 1$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ · b) $z^8 = 1$ · c) $z^{2026} = i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).