

Plaqueette 1 - Module, argument, forme exponentielle et formules d'Euler

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- **Forme trigonométrique** : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = |z| > 0$ et $\theta = \arg(z)$ (défini modulo 2π).
- **Forme exponentielle** : $z = r e^{i\theta}$, avec $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.
- Passage depuis la forme algébrique $z = a + ib$: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.
- **Produit et quotient** :

$$r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta + \theta')} \quad \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$$

- **Formule de Moivre** : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, donc $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.
- **Formules d'Euler** :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- Conjugué et inverse : $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$ et $\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$.
- **Racines n-ièmes de l'unité** : les solutions de $z^n = 1$ sont $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$; leur somme est nulle pour $n \geq 2$.
- Valeurs de référence : $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

Correction de l'exercice 1 - Module et argument

- a) $r = \sqrt{1+3} = 2$. Puis $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.
- b) $r = 2$; le point image est sur l'axe réel négatif, donc $\theta = \pi$.
- c) $r = 3$; le point est sur l'axe imaginaire négatif, donc $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{3\pi}{2}$).
- **Méthode** : on calcule toujours r **avant** l'argument, puisque $\cos \theta$ et $\sin \theta$ s'obtiennent en divisant par r .

Réponse. a) 2 et $\frac{\pi}{3}$ · b) 2 et π · c) 3 et $-\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Forme exponentielle

a) $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

- $\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$: l'argument est dans le **deuxième** quadrant, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

$$z = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

b) $r = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$.

$$- \cos \theta = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$z' = 6 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Réponse. a) $\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ · b) $6 e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Correction de l'exercice 3 - Retour à la forme algébrique

On utilise $re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

a) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2i\sqrt{3}$$

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$$\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$$

Réponse. a) $-2 + 2i\sqrt{3}$ · b) $1 - i$.

Correction de l'exercice 4 - Produit et quotient

Règles du cours : les modules se multiplient (ou se divisent), les arguments s'ajoutent (ou se soustraient).

— Produit : modules $2 \times 3 = 6$; arguments $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + 2\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$.

$$zz' = 6 e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

— Quotient : modules $\frac{2}{3}$; arguments $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

$$\frac{z}{z'} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Réponse. $zz' = 6e^{i\frac{5\pi}{12}}$ et $\frac{z}{z'} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Correction de l'exercice 5 - Formule de Moivre

— On a vu que $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

— Formule de Moivre : $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

$$(2e^{i\frac{\pi}{3}})^6 = 2^6 e^{i\frac{6\pi}{3}} = 64 e^{i2\pi} = 64$$

— Le résultat est **réel** : $(1 + i\sqrt{3})^6 = 64$.

— Contrôle du module : $|1 + i\sqrt{3}|^6 = 2^6 = 64$. Cohérent. Le calcul direct par développement serait beaucoup plus long.

Réponse. 64.

Correction de l'exercice 6 - Calcul d'un argument par le quotient

a) $1 + i$: module $\sqrt{2}$, argument $\frac{\pi}{4}$, donc $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

— $\sqrt{3} + i$: module $\sqrt{3+1} = 2$; $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$, donc argument $\frac{\pi}{6}$ et écriture $2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) On divise les modules et on soustrait les arguments :

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

- Donc $|Z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{12}$ (soit 15°).
- Application classique : cela permet d'obtenir $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ en repassant à la forme algébrique.

Réponse. b) $|Z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{12}$.

Correction de l'exercice 7 - Conjugué et inverse

- **Conjugué** : on change le signe de l'argument, le module ne change pas : $\bar{z} = 5e^{-i\frac{2\pi}{5}}$.
- **Inverse** : on inverse le module et on change le signe de l'argument : $\frac{1}{z} = \frac{1}{5}e^{-i\frac{2\pi}{5}}$.
- **Opposé** : $-1 = e^{i\pi}$, donc $-z = 5e^{i(\frac{2\pi}{5} + \pi)} = 5e^{i\frac{7\pi}{5}}$.
- Contrôle : $\frac{2\pi}{5} + \pi = \frac{2\pi + 5\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}$. Correct.

Réponse. $\bar{z} = 5e^{-i\frac{2\pi}{5}}$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{5}e^{-i\frac{2\pi}{5}}$; $-z = 5e^{i\frac{7\pi}{5}}$.

Correction de l'exercice 8 - Formules d'Euler

a) Formules d'Euler du cours :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

b) En multipliant les égalités précédentes :

- $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$.
- $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$.
- Démonstration : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ (par parité du cosinus et imparité du sinus). En ajoutant, les parties imaginaires s'annulent ; en soustrayant, ce sont les parties réelles.

Réponse. b) $2 \cos \theta$ et $2i \sin \theta$.

Correction de l'exercice 9 - Linéarisation

On part de la formule d'Euler et on élève au carré.

- $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, donc

$$\cos^2 \theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} = \frac{e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{4}$$

- Or $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^0 = 1$, donc le numérateur vaut $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2$.
- D'après la question précédente, $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2 \cos(2\theta)$.

$$\cos^2 \theta = \frac{2 \cos(2\theta) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

- Contrôle pour $\theta = 0$: $\cos^2 0 = 1$ et $\frac{1+1}{2} = 1$. Cohérent.

Réponse. $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.

Correction de l'exercice 10 - Racines carrées d'un complexe

On cherche $z = re^{i\theta}$ tel que $r^2 e^{2i\theta} = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- Modules : $r^2 = 4$, donc $r = 2$ (le module est positif).
- Arguments : $2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, donc $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$.
- Pour $k = 0$: $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Pour $k = 1$: $z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -z_1$.
- Les deux solutions sont **opposées**, ce qui est toujours le cas pour une équation $z^2 = a$.

Réponse. $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Correction de l'exercice 11 - Racines cubiques de l'unité

a) On écrit $1 = e^{i \times 0}$ et on cherche $z = re^{i\theta}$:

- Modules : $r^3 = 1$, donc $r = 1$.
- Arguments : $3\theta = 2k\pi$, donc $\theta = \frac{2k\pi}{3}$ pour $k = 0, 1, 2$.
- Solutions : $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Somme : $1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - 1 + 0i = 0$.

- La somme est bien nulle : c'est une propriété générale des racines n -ièmes de l'unité pour $n \geq 2$.
- Géométriquement, les trois points forment un **triangle équilatéral** inscrit dans le cercle unité.

Réponse. a) 1 ; $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ · b) somme nulle.

Correction de l'exercice 12 - Synthèse : puissance et forme algébrique

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, donc $|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$.

— $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Moivre : $z^8 = e^{i\frac{8\pi}{4}} = e^{i2\pi} = 1$.

c) $z^{2026} = e^{i\frac{2026\pi}{4}}$. On réduit l'argument modulo 2π :

- $\frac{2026}{8} = 253,25$, donc $2026 = 8 \times 253 + 2$, et $\frac{2026\pi}{4} = 506\pi + \frac{\pi}{2}$.
- Comme $506\pi = 253 \times 2\pi$ est un multiple de 2π , il reste $z^{2026} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
- Contrôle : le module vaut $1^{2026} = 1$, ce qui est bien le module de i .

Réponse. a) $|z| = 1$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ · b) $z^8 = 1$ · c) $z^{2026} = i$.