Plaquette 2 – Module, argument et passage d'une forme à l'autre

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions. Pour $z \neq 0$, écrire z sous forme trigonométrique ou exponentielle, c'est écrire

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \qquad \text{avec} \qquad r = |z| > 0$$

Le réel θ est un **argument** de z, noté $\arg(z)$; il est défini à 2π près.

De la forme algébrique à la forme exponentielle. Pour $z = a + ib$ non nul :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

Il faut les **deux** relations pour conclure : le cosinus seul laisse deux angles opposés possibles.

Valeurs du cercle trigonométrique à connaître par cœur.

angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Cas particuliers immédiats. Pour $a > 0$:

$$\arg(a) = 0 \qquad \arg(-a) = \pi \qquad \arg(ia) = \frac{\pi}{2} \qquad \arg(-ia) = -\frac{\pi}{2}$$

Règles de calcul sur les arguments. Pour z et z' non nuls :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \qquad \arg(z^n) = n\arg z$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg z \qquad \arg(-z) = \arg z + \pi$$

Toutes ces égalités s'entendent **modulo** 2π.

Deux lectures utiles. Un complexe est **réel** si et seulement si son argument vaut 0 ou π ; il est **imaginaire pur** si et seulement si son argument vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 1 – Module et argument, cas de base

Pour $z = a + ib$ non nul, on calcule le module $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis on cherche un angle θ tel que $\cos\theta = \frac{a}{r}$ **et** $\sin\theta = \frac{b}{r}$; il faut les deux conditions pour fixer l'angle.

— $z_1 = 1 + i$: $r = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{4}$.

— $z_2 = -1 + i$: $r = \sqrt{2}$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (deuxième quadrant).

— $z_3 = 2i$ est sur la demi-droite des imaginaires purs positifs : $|z_3| = 2$ et $\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$.

— $z_4 = -5$ est un réel négatif : $|z_4| = 5$ et $\arg z_4 = \pi$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Contrôle : $z_2 = -\overline{z_1}$, et $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

Réponse. $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$ · $|z_2| = \sqrt{2}$, $\arg z_2 = \frac{3\pi}{4}$ · $|z_3| = 2$, $\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$ · $|z_4| = 5$, $\arg z_4 = \pi$.

Correction de l'exercice 2 – Un argument dans le troisième quadrant

Le point d'affixe $-\sqrt{3} - i$ est dans le troisième quadrant : son argument est entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$. Son module vaut $\sqrt{3+1} = 2$, et l'on cherche θ tel que

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

L'angle de référence est $\frac{\pi}{6}$, et les deux signes négatifs donnent $\theta = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$. Donc $z = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}}$ ($\frac{7\pi}{6}$ convient aussi). **Contrôle** : $2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$. Ne regarder que le cosinus donnerait $\frac{5\pi}{6}$, dont le sinus est positif : ce serait l'argument de $-\sqrt{3} + i$.

Réponse. $|z| = 2$, $\arg z = -\frac{5\pi}{6}$ et $z = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Correction de l'exercice 3 – Quatre formes exponentielles

Un réel positif a pour argument 0, un réel négatif π : $3 = 3\,\mathrm{e}^{i0}$ et $-3 = 3\,\mathrm{e}^{i\pi}$. Le nombre $-4i$ a pour module 4, et $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1$ donnent $\theta = -\frac{\pi}{2}$: $-4i = 4\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Pour $1 - i\sqrt{3}$, le module vaut $\sqrt{1+3} = 2$, avec $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (quatrième quadrant) :

$$1 - i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Contrôle : $2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$. Son conjugué $1 + i\sqrt{3}$ a le même module et l'argument opposé, $\frac{\pi}{3}$.

Réponse. $3 = 3\,\mathrm{e}^{i0}$, $-3 = 3\,\mathrm{e}^{i\pi}$, $-4i = 4\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $1 - i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Correction de l'exercice 4 – Retour à la forme algébrique

On revient à la forme algébrique avec

$$r\,\mathrm{e}^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

— $2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2}i = \sqrt{3} + i$.

— $3\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.

— $5\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$.

— $\mathrm{e}^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$: c'est l'identité d'Euler, $\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$.

Contrôle des modules : $\sqrt{3+1} = 2$ et $\sqrt{\frac{25}{4} + \frac{75}{4}} = 5$.

Réponse. $\sqrt{3} + i$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, $-\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$ et -1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Produit et quotient sous forme exponentielle

Sous forme exponentielle, les modules se multiplient et les arguments s'ajoutent :

$$r\,\mathrm{e}^{i\theta}\times r'\mathrm{e}^{i\theta'}=rr'\,\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$$

Donc $z_1z_2=6\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=6\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}$. Pour le quotient, les modules se divisent et les arguments se soustraient : $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$. Pour la puissance (formule de Moivre), $z_1^3=2^3\,\mathrm{e}^{i\pi}=-8$.

Contrôle : $z_1=1+i\sqrt{3}$, $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=-2+2i\sqrt{3}$, puis $\left(-2+2i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)=-8$.

Réponse. $z_1z_2=6\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}$, $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$ et $z_1^3=8\,\mathrm{e}^{i\pi}=-8$.

Correction de l'exercice 6 – Une grande puissance par Moivre

On écrit $1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ (module $\sqrt{2}$, argument $\dfrac{\pi}{4}$), puis on applique la formule de Moivre :

$$(1+i)^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\mathrm{e}^{i\frac{12\pi}{4}}=64\,\mathrm{e}^{3i\pi}=64\,\mathrm{e}^{i\pi}=-64$$

car 3π et π diffèrent de 2π. **Vérification** directe : $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^4=-4$, $(1+i)^8=16$ et $(1+i)^{12}=16\times(-4)=-64$. La méthode exponentielle reste praticable pour de très grands exposants : $(1+i)^{2026}=2^{1013}\,\mathrm{e}^{i\frac{1013\pi}{2}}=2^{1013}\,i$.

Réponse. $(1+i)^{12}=64\,\mathrm{e}^{i\pi}=-64$.

Correction de l'exercice 7 – Puissance d'un complexe du troisième quadrant

Le nombre $-1+i\sqrt{3}$ a pour module $\sqrt{1+3}=2$; avec $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, son argument est $\dfrac{2\pi}{3}$. Par la formule de Moivre :

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9=2^9\,\mathrm{e}^{i\frac{18\pi}{3}}=512\,\mathrm{e}^{6i\pi}=512$$

car 6π est un multiple de 2π : le résultat est un réel positif. **Contrôle** : $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3=8\,\mathrm{e}^{2i\pi}=8$, et $8^3=512$.

Réponse. $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9=512$.

Correction de l'exercice 8 – Argument d'un quotient

On met le numérateur et le dénominateur sous forme exponentielle : $1+i\sqrt{3}=2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$. Le module du quotient est le quotient des modules, l'argument la différence des arguments :

$$Z=\frac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}$$

Par le conjugué, $Z=\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1+i)}{2}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$. **Contrôle** du module : $\dfrac{4-2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}=2$. En identifiant les parties réelles des deux formes, on obtient au passage $\cos\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Réponse. $|Z|=\sqrt{2}$, $\arg Z=\dfrac{7\pi}{12}$, et $Z=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\,i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Conjugué, inverse et opposé

Le conjugué a le même module et un argument opposé, car $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$: $\overline{z} = 4\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}}$. L'inverse a le module inverse et l'argument opposé : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}}$. L'opposé a le même module et l'argument augmenté de π :

$$-z = 4\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{2\pi}{5}+\pi\right)} = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{5}}$$

Enfin $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$. **Contrôle** : $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{z}{z\overline{z}} = \dfrac{z}{|z|^2} = \dfrac{z}{16}$, qui a bien pour forme $\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$.

Réponse. $\overline{z} = 4\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}}$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}}$, $-z = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{5}}$ et $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$.

Correction de l'exercice 10 – Une équation de degré 3 par les arguments

On cherche $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$. L'équation $r^3\,\mathrm{e}^{3i\theta} = 8\,\mathrm{e}^{i0}$ équivaut à l'égalité des modules et à celle des arguments à 2π près :

$$r^3 = 8 \qquad 3\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $r = 2$ et $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$; les valeurs $k = 0,\ 1,\ 2$ donnent trois angles distincts, les suivantes les répètent. Les solutions sont 2, $2\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$ et $2\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}$. **Contrôle** : $z^3 - 8 = (z-2)\left(z^2 + 2z + 4\right)$, et le second facteur a pour racines $\dfrac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$. Les trois points forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 2.

Réponse. $S = \left\{2\,;\,-1 + i\sqrt{3}\,;\,-1 - i\sqrt{3}\right\}$.

Correction de l'exercice 11 – Racines carrées d'un complexe

On écrit $1 + i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et l'on cherche $z = r\,\mathrm{e}^{i\alpha}$ avec $r > 0$. L'équation $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$ donne $r^2 = 2$ et $2\alpha = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $r = \sqrt{2}$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$: deux valeurs distinctes, $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{7\pi}{6}$.

$$z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad z_2 = -z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Vérification : $z_1^2 = \dfrac{6}{4} - \dfrac{2}{4} + 2 \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}i = 1 + \dfrac{\sqrt{12}}{2}i = 1 + i\sqrt{3}$. Un complexe non nul a exactement deux racines carrées, opposées.

Réponse. $z = \pm\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$, soit $z = \pm\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)$.

Correction de l'exercice 12 – cos(3θ) par la formule de Moivre

D'une part, la formule de Moivre donne $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$. D'autre part, on développe le cube avec $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, où $a = \cos\theta$ et $b = i\sin\theta$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

car $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$. Deux complexes égaux ont la même partie réelle : $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$. En remplaçant $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$, on obtient $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. **Contrôle** en $\theta = \dfrac{\pi}{3}$: $4 \times \dfrac{1}{8} - \dfrac{3}{2} = -1 = \cos\pi$. Les parties imaginaires donnent de même $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. En identifiant les parties réelles de $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ et de $\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$, puis en remplaçant $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$: $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Correction de l'exercice 13 – Linéariser cos³θ

On isole le cube dans la formule précédente : $4\cos^3\theta = \cos(3\theta) + 3\cos\theta$, donc

$$\cos^3\theta = \frac{3\cos\theta + \cos(3\theta)}{4}$$

On a **linéarisé** $\cos^3\theta$: la puissance est remplacée par une somme de cosinus d'angles multiples. **Contrôle** en $\theta = 0$: $\frac{3+1}{4} = 1$. Cette forme est utile pour intégrer : une primitive de $\cos^3\theta$ n'est pas immédiate, alors qu'une somme de cosinus s'intègre terme à terme, ici en $\frac{3\sin\theta}{4} + \frac{\sin(3\theta)}{12}$, dont la dérivée redonne bien $\frac{3\cos\theta + \cos(3\theta)}{4}$.

Réponse. $\cos^3\theta = \frac{3\cos\theta + \cos(3\theta)}{4}$: sous cette forme, l'expression s'intègre terme à terme, ce qu'une puissance ne permet pas.

Correction de l'exercice 14 – Transformer a cos x + b sin x

a) On développe le membre de droite avec la formule $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$:

$$2\cos\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right) = 2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\sin x\right) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

Les nombres 2 et $\frac{\pi}{6}$ sont le module et un argument de $\sqrt{3} + i$: en général, $a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\varphi)$ avec $r\,\mathrm{e}^{i\varphi} = a + ib$.

b) L'équation devient $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, d'où $x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec k entier. **Contrôle** : en $x = -\frac{\pi}{6}$, $\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = 1$.

Réponse. a) démontré par la formule d'addition · b) $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,,\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Correction de l'exercice 15 – Amplitude et déphasage d'un signal

a) On associe à u le complexe $5 + 5i\sqrt{3}$: son module vaut $\sqrt{25+75} = 10$, et son argument φ vérifie $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Ainsi

$$u(t) = 10\cos\left(\omega t - \tfrac{\pi}{3}\right)$$

Contrôle : $10\left(\cos\omega t\cos\frac{\pi}{3} + \sin\omega t\sin\frac{\pi}{3}\right) = 5\cos\omega t + 5\sqrt{3}\sin\omega t$.

b) L'amplitude vaut 10 V et le déphasage $\frac{\pi}{3}$ (soit 60°). Le maximum est atteint lorsque $\omega t - \frac{\pi}{3} = 0$, c'est-à-dire après l'instant 0 où $\cos(\omega t)$ est maximal : la tension est en retard de $\frac{\pi}{3}$.

c) $100\pi t = \frac{\pi}{3}$ donne $t = \frac{1}{300}$ s, soit environ 3 ms. **Contrôle** : la période vaut $\frac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02$ s, et $\frac{1}{300}$ en est le sixième, ce qui correspond bien à un angle de $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Réponse. a) $u(t) = 10\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ · b) $U_{\max} = 10$ V et $\varphi = \frac{\pi}{3}$: la tension est en retard de $\frac{\pi}{3}$ · c) $t = \frac{1}{300} \approx 3$ ms.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).