

Plaquette 2 – Module, argument et passage d'une forme à l'autre

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions. Pour $z \neq 0$, écrire z sous forme trigonométrique ou exponentielle, c'est écrire

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| > 0$$

Le réel θ est un **argument** de z , noté $\arg(z)$; il est défini à 2π près.

De la forme algébrique à la forme exponentielle. Pour $z = a + ib$ non nul :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos \theta = \frac{a}{r} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

Il faut les **deux** relations pour conclure : le cosinus seul laisse deux angles opposés possibles.

Valeurs du cercle trigonométrique à connaître par cœur.

angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Cas particuliers immédiats. Pour $a > 0$:

$$\arg(a) = 0 \quad \arg(-a) = \pi \quad \arg(ia) = \frac{\pi}{2} \quad \arg(-ia) = -\frac{\pi}{2}$$

Règles de calcul sur les arguments. Pour z et z' non nuls :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad \arg(z^n) = n \arg z$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad \arg(-z) = \arg z + \pi$$

Toutes ces égalités s'entendent **modulo** 2π .

Deux lectures utiles. Un complexe est **réel** si et seulement si son argument vaut 0 ou π ; il est **imaginaire pur** si et seulement si son argument vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 1 – Module et argument, cas de base

- **Méthode** : calculer r , puis identifier θ par $\cos \theta = \frac{a}{r}$ **et** $\sin \theta = \frac{b}{r}$ ✓
- **Module de** z_1 : $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ✓
- **Cosinus** : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓
- **Sinus** : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓
- **Angle reconnu** : $\theta = \frac{\pi}{4}$ ✓
- **Résultat** :

$$|z_1| = \sqrt{2} \quad \arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$$

- **Module de z_2** : $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ✓
- **Cosinus** : $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, **sinus** : $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓
- **Lecture** : cosinus négatif et sinus positif, l'angle est dans le deuxième quadrant ✓
- **Angle** : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ✓
- **Résultat** :

$$|z_2| = \sqrt{2} \quad \arg(z_2) = \frac{3\pi}{4}$$

- **Cas de z_3** : c'est un imaginaire pur de partie imaginaire positive ✓
- **Résultat** : $|z_3| = 2$ et $\arg(z_3) = \frac{\pi}{2}$ ✓
- **Cas de z_4** : c'est un réel **négatif** ✓
- **Résultat** : $|z_4| = 5$ et $\arg(z_4) = \pi$ ✓
- **Piège évité** : $|-5| = 5$, un module n'est jamais négatif ✓
- **Contrôle de z_2** : $z_2 = -\overline{z_1}$, or $\arg(-\overline{z_1}) = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ ✓

Réponse. $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$ · $|z_2| = \sqrt{2}$, $\arg z_2 = \frac{3\pi}{4}$ · $|z_3| = 2$, $\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$ · $|z_4| = 5$, $\arg z_4 = \pi$.

Correction de l'exercice 2 - Un argument dans le troisième quadrant

- **Repérage** : $a = -\sqrt{3}$ et $b = -1$, les deux sont négatifs ✓
- **Anticipation** : le point est dans le **troisième quadrant**, l'argument sera entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$ ✓
- **Module** : $\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1}$ ✓
- **Calcul** : $\sqrt{4} = 2$ ✓
- **Cosinus** : $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Sinus** : $\frac{-1}{2}$ ✓
- **Angle de référence** : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Les deux signes sont négatifs** : on ajoute π à $\frac{\pi}{6}$, ou on retranche π ✓
- **Angle trouvé** : $\theta = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$ ✓
- **Vérification** : $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Vérification** : $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ ✓
- **Forme exponentielle** :

$$z = 2 e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

- **Écriture équivalente** : $\frac{7\pi}{6}$ convient aussi, car $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$ ✓
- **Erreur classique** : ne regarder que le cosinus donnerait $\frac{5\pi}{6}$, dont le sinus est **positif** ✓
- **Conséquence de cette erreur** : on obtiendrait $-\sqrt{3} + i$ au lieu de $-\sqrt{3} - i$ ✓

— **Contrôle final** : $2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i \checkmark$

Réponse. $|z| = 2$, $\arg z = -\frac{5\pi}{6}$ et $z = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Correction de l'exercice 3 - Quatre formes exponentielles

— **Réel positif** : 3 a pour module 3 et pour argument 0 $\checkmark$

— **Forme exponentielle** :

$$3 = 3e^{i0}$$

— **Réel négatif** : -3 a pour module 3 et pour argument π $\checkmark$

— **Forme exponentielle** :

$$-3 = 3e^{i\pi}$$

— **Contrôle** : $3(\cos \pi + i\sin \pi) = 3 \times (-1) = -3 \checkmark$

— **Imaginaire pur négatif** : $-4i$ a pour module 4 $\checkmark$

— **Argument** : $\cos \theta = 0$ et $\sin \theta = -1$, donc $\theta = -\frac{\pi}{2} \checkmark$

— **Forme exponentielle** :

$$-4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

— **Dernier cas** : $a = 1$ et $b = -\sqrt{3}$ $\checkmark$

— **Module** : $\sqrt{1+3} = 2 \checkmark$

— **Cosinus** : $\frac{1}{2} \checkmark$

— **Sinus** : $-\frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$

— **Quadrant** : cosinus positif, sinus négatif, donc quatrième quadrant $\checkmark$

— **Angle** : $\theta = -\frac{\pi}{3} \checkmark$

— **Forme exponentielle** :

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

— **Contrôle** : $2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} \checkmark$

— **Remarque utile** : $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, c'est le conjugué et l'argument est opposé $\checkmark$

Réponse. $3 = 3e^{i0}$, $-3 = 3e^{i\pi}$, $-4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Correction de l'exercice 4 - Retour à la forme algébrique

— **Formule à appliquer** :

$$re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

— **Premier cas** : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \checkmark$

— **Calcul** : $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2}i \checkmark$

— **Résultat** :

$$2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$$

— **Contrôle du module** : $\sqrt{3+1} = 2 \checkmark$

— **Deuxième cas** : $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \checkmark$

— **Calcul** : $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$ ✓

— **Résultat** :

$$3e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

— **Contrôle du module** : $\frac{3\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 3$ ✓

— **Troisième cas** : $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓

— **Calcul** : $-\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$ ✓

— **Résultat** :

$$5e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

— **Contrôle du module** : $\sqrt{\frac{25}{4} + \frac{75}{4}} = \sqrt{25} = 5$ ✓

— **Quatrième cas** : $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$ ✓

— **Résultat** :

$$e^{i\pi} = -1$$

— **Remarque** : c'est l'identité d'Euler, souvent écrite $e^{i\pi} + 1 = 0$ ✓

Réponse. $\sqrt{3} + i$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, $-\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$ et -1 .

Correction de l'exercice 5 - Produit et quotient sous forme exponentielle

— **Règle du produit** : les modules se **multiplient**, les arguments s'**ajoutent** ✓

— **Formule** :

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta + \theta')}$$

— **Module du produit** : $2 \times 3 = 6$ ✓

— **Somme des arguments** : $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ ✓

— **Au même dénominateur** : $\frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$ ✓

— **Résultat** :

$$z_1 z_2 = 6e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

— **Règle du quotient** : les modules se **divisent**, les arguments se **soustraient** ✓

— **Module** : $\frac{2}{3}$ ✓

— **Différence des arguments** : $\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$ ✓

— **Résultat** :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

— **Règle de la puissance (Moivre)** : $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ ✓

— **Module** : $2^3 = 8$ ✓

— **Argument** : $3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$ ✓

— **Résultat** :

$$z_1^3 = 8e^{i\pi} = -8$$

- **Contrôle** : $z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \checkmark$
- **Cube** : $(1 + i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3} \checkmark$
- **Puis** : $(-2 + 2i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = -2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} - 6 = -8 \checkmark$
- **Cohérence** : les deux méthodes donnent -8 , et la seconde est trois fois plus longue $\checkmark$

Réponse. $z_1 z_2 = 6 e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $z_1^3 = 8 e^{i\pi} = -8$.

Correction de l'exercice 6 - Une grande puissance par Moivre

- **Forme exponentielle de la base** : $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \checkmark$
- **Écriture** : $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \checkmark$
- **Formule de Moivre** :

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

- **Module** : $(\sqrt{2})^{12} = 2^6 \checkmark$
- **Calcul** : $64 \checkmark$
- **Argument** : $12 \times \frac{\pi}{4} = 3\pi \checkmark$
- **Réduction modulo 2π** : $3\pi - 2\pi = \pi \checkmark$
- **Résultat** :

$$(1 + i)^{12} = 64 e^{i\pi} = -64$$

- **Vérification par calcul direct** : $(1 + i)^2 = 2i \checkmark$
- **Puissance 4** : $(2i)^2 = -4 \checkmark$
- **Puissance 8** : $(-4)^2 = 16 \checkmark$
- **Puissance 12** : $16 \times (-4) \checkmark$
- **Résultat** : $-64 \checkmark$
- **Cohérence** : les deux méthodes coïncident $\checkmark$
- **Intérêt de Moivre** : pour $(1 + i)^{2026}$, le calcul direct serait impraticable $\checkmark$
- **Application** : module $(\sqrt{2})^{2026} = 2^{1013}$, argument $\frac{2026\pi}{4} = \frac{1013\pi}{2} \checkmark$
- **Réduction** : $1013 = 4 \times 253 + 1$, donc l'argument vaut $\frac{\pi}{2}$ modulo $2\pi \checkmark$
- **Résultat** : $(1 + i)^{2026} = 2^{1013} i \checkmark$

Réponse. $(1 + i)^{12} = 64 e^{i\pi} = -64$.

Correction de l'exercice 7 - Puissance d'un complexe du troisième quadrant

- **Module** : $\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} \checkmark$
- **Calcul** : $\sqrt{4} = 2 \checkmark$
- **Cosinus** : $-\frac{1}{2} \checkmark$
- **Sinus** : $\frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$
- **Quadrant** : cosinus négatif, sinus positif, deuxième quadrant $\checkmark$
- **Argument** : $\theta = \frac{2\pi}{3} \checkmark$

— **Vérification** : $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓

— **Forme exponentielle** :

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

— **Moivre** : module 2^9 , argument $9 \times \frac{2\pi}{3}$ ✓

— **Module** : 512 ✓

— **Argument** : 6π ✓

— **Réduction modulo 2π** : $6\pi = 3 \times 2\pi$, donc l'argument vaut 0 ✓

— **Conclusion** : le résultat est un réel **positif** ✓

— **Résultat** :

$$(-1 + i\sqrt{3})^9 = 512$$

— **Contrôle partiel** : $(-1 + i\sqrt{3})^3 = 2^3 e^{i2\pi} = 8$ ✓

— **Puis** : $\left((-1 + i\sqrt{3})^3\right)^3 = 8^3 = 512$ ✓

— **Cohérence** : les deux chemins mènent au même résultat ✓

Réponse. $(-1 + i\sqrt{3})^9 = 512$.

Correction de l'exercice 8 - Argument d'un quotient

— **Numérateur** : $|1 + i\sqrt{3}| = 2$ et son argument vaut $\frac{\pi}{3}$ ✓

— **Forme exponentielle** : $1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ ✓

— **Dénominateur** : $|1 - i| = \sqrt{2}$ et son argument vaut $-\frac{\pi}{4}$ ✓

— **Forme exponentielle** : $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ✓

— **Module du quotient** : $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ✓

— **Argument du quotient** : $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ✓

— **Somme** : $\frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$ ✓

— **Forme exponentielle** :

$$Z = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

— **Forme algébrique, par le conjugué** : on multiplie haut et bas par $1 + i$ ✓

— **Dénominateur** : $(1 - i)(1 + i) = 2$ ✓

— **Numérateur** : $(1 + i\sqrt{3})(1 + i) = 1 + i + i\sqrt{3} + i^2\sqrt{3}$ ✓

— **Simplification** : $1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$ ✓

— **Résultat** :

$$Z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i$$

— **Contrôle du module** : $\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} + \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}$ ✓

— **Somme** : $\frac{8}{4} = 2$, donc le module vaut $\sqrt{2}$ ✓

— **Cohérence** : conforme au calcul par les arguments ✓

— **Retombée classique** : en identifiant les deux formes, on obtient $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ ✓

Réponse. $|Z| = \sqrt{2}$, $\arg Z = \frac{7\pi}{12}$, et $Z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$.

Correction de l'exercice 9 - Conjugué, inverse et opposé

— **Conjugué** : même module, argument **opposé** ✓

— **Résultat** :

$$\bar{z} = 4 e^{-i\frac{2\pi}{5}}$$

— **Justification** : $\overline{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$ ✓

— **Inverse** : module inversé, argument opposé ✓

— **Module** : $\frac{1}{4}$ ✓

— **Résultat** :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{2\pi}{5}}$$

— **Opposé** : même module, argument augmenté de π ✓

— **Calcul de l'argument** : $\frac{2\pi}{5} + \pi = \frac{2\pi}{5} + \frac{5\pi}{5}$ ✓

— **Somme** : $\frac{7\pi}{5}$ ✓

— **Résultat** :

$$-z = 4 e^{i\frac{7\pi}{5}}$$

— **Écriture équivalente** : $\frac{7\pi}{5} - 2\pi = -\frac{3\pi}{5}$, donc $-z = 4 e^{-i\frac{3\pi}{5}}$ ✓

— **Dernier cas** : $\frac{1}{\bar{z}}$ a pour module $\frac{1}{4}$ et pour argument l'opposé de $-\frac{2\pi}{5}$ ✓

— **Résultat** :

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

— **Relation remarquable** : $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$, ici $\frac{z}{16}$ ✓

— **Vérification** : $\frac{4 e^{i\frac{2\pi}{5}}}{16} = \frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ✓

— **Cohérence** : les deux méthodes donnent le même résultat ✓

— **À retenir** : conjuguer et inverser donnent le même argument ; seul le module change ✓

Réponse. $\bar{z} = 4 e^{-i\frac{2\pi}{5}}$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{2\pi}{5}}$, $-z = 4 e^{i\frac{7\pi}{5}}$ et $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

Correction de l'exercice 10 - Une équation de degré 3 par les arguments

— **Méthode** : on cherche z sous forme exponentielle $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ ✓

— **Membre de gauche** : $z^3 = r^3 e^{3i\theta}$ ✓

— **Membre de droite** : $8 = 8 e^{i0}$ ✓

— **Égalité des modules** : $r^3 = 8$, donc $r = 2$ ✓

— **Justification** : r est un réel **positif**, la racine cubique réelle est unique ✓

— **Égalité des arguments, modulo 2π** : $3\theta = 0 + 2k\pi$ avec k entier ✓

— **Donc** : $\theta = \frac{2k\pi}{3}$ ✓

- **Valeurs distinctes** : $k = 0, k = 1, k = 2$ donnent trois angles, les suivants se répètent ✓
- **Premier angle** : $\theta = 0$, donc $z = 2$ ✓
- **Deuxième angle** : $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ✓
- **Forme algébrique** : $2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$ ✓
- **Troisième angle** : $\theta = \frac{4\pi}{3}$, équivalent à $-\frac{2\pi}{3}$ ✓
- **Forme algébrique** : $2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{2; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$$
- **Contrôle par la factorisation** : $z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$ ✓
- **Discriminant du facteur** : $4 - 16 = -12$, donc $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ✓
- **Racines** : $\frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes donnent les mêmes trois solutions ✓
- **Observation géométrique** : les trois points forment un **triangle équilatéral** inscrit dans le cercle de rayon 2 ✓

Réponse. $S = \{2; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$.

Correction de l'exercice 11 - Racines carrées d'un complexe

- **Forme exponentielle du second membre** : module $\sqrt{1+3} = 2$ ✓
- **Argument** : $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ ✓
- **Écriture** : $1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ ✓
- **On pose** : $z = r e^{i\alpha}$ avec $r > 0$ ✓
- **Équation sur les modules** : $r^2 = 2$, donc $r = \sqrt{2}$ ✓
- **Équation sur les arguments** : $2\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ✓
- **Donc** : $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ✓
- **Deux valeurs distinctes** : $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $\alpha = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ ✓
- **Solutions sous forme exponentielle** :

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \quad z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{6}} = -z_1$$

- **Forme algébrique de z_1** : $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ ✓
- **Calcul** : $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ✓
- **Résultat** :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad z_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

- **Vérification** : partie réelle du carré = $\frac{6}{4} - \frac{2}{4} = 1$ ✓
- **Partie imaginaire du carré** : $2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2}$ ✓

- **Simplification** : $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \checkmark$
- **Cohérence** : on retrouve $1 + i\sqrt{3} \checkmark$
- **À retenir** : un complexe non nul a **exactement deux** racines carrées, opposées l'une de l'autre $\checkmark$

Réponse. $z = \pm\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$, soit $z = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

Correction de l'exercice 12 - $\cos(3\theta)$ par la formule de Moivre

- **Formule de Moivre** : $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta) \checkmark$
- **Autre chemin** : développer directement le cube $\checkmark$
- **Identité utilisée** : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \checkmark$
- **Ici** : $a = \cos \theta$ et $b = i \sin \theta \checkmark$
- **Premier terme** : $\cos^3 \theta \checkmark$
- **Deuxième terme** : $3 \cos^2 \theta \times i \sin \theta = 3i \cos^2 \theta \sin \theta \checkmark$
- **Troisième terme** : $3 \cos \theta \times i^2 \sin^2 \theta = -3 \cos \theta \sin^2 \theta \checkmark$
- **Quatrième terme** : $i^3 \sin^3 \theta = -i \sin^3 \theta \checkmark$
- **Partie réelle du développement** : $\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \checkmark$
- **Identification avec Moivre** : deux complexes égaux ont même partie réelle $\checkmark$
- **Égalité obtenue** :

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

- **On remplace** : $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \checkmark$
- **Substitution** : $\cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \checkmark$
- **Développement** : $\cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta \checkmark$
- **Résultat** :

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

- **Contrôle en $\theta = 0$** : $\cos 0 = 1$, et $4 - 3 = 1 \checkmark$
- **Contrôle en $\theta = \frac{\pi}{3}$** : $\cos \pi = -1 \checkmark$
- **Vérification** : $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \checkmark$
- **Bonus, par la partie imaginaire** : $\sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \checkmark$

Réponse. En identifiant les parties réelles de $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$ et de $\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$, puis en remplaçant $\sin^2 \theta$ par $1 - \cos^2 \theta$: $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

Correction de l'exercice 13 - Linéariser $\cos^3 \theta$

- **Point de départ** : $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \checkmark$
- **On isole le cube** : $4 \cos^3 \theta = \cos(3\theta) + 3 \cos \theta \checkmark$
- **On divise par 4** :

$$\cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos(3\theta)}{4}$$

- **Vocabulaire** : cette opération s'appelle une **linéarisation** $\checkmark$
- **Définition** : on remplace une puissance de cos par une **somme** de cosinus d'angles multiples $\checkmark$
- **Contrôle en $\theta = 0$** : membre de gauche 1 $\checkmark$

- **Membre de droite** : $\frac{3+1}{4} = 1$ ✓
- **Contrôle en $\theta = \frac{\pi}{2}$** : membre de gauche 0 ✓
- **Membre de droite** : $\frac{0 + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{4} = 0$ ✓
- **Utilité en analyse** : une primitive de $\cos^3 \theta$ n'est pas immédiate ✓
- **Alors qu'une somme de cosinus s'intègre terme à terme** ✓
- **Primitive** :

$$\int \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{3 \sin \theta}{4} + \frac{\sin(3\theta)}{12} + C$$

- **Vérification par dérivation** : la dérivée vaut $\frac{3 \cos \theta}{4} + \frac{3 \cos(3\theta)}{12}$ ✓
- **Simplification** : $\frac{3 \cos \theta}{4} + \frac{\cos(3\theta)}{4}$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien $\cos^3 \theta$ ✓
- **Autre usage** : en physique des signaux, la linéarisation fait apparaître les **harmoniques** — ici l'harmonique de rang 3 ✓

Réponse. $\cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos(3\theta)}{4}$: sous cette forme, l'expression s'intègre terme à terme, ce qu'une puissance ne permet pas.

Correction de l'exercice 14 - Transformer $a \cos x + b \sin x$

- **a) Méthode** : on part du membre de **droite**, plus facile à développer ✓
- **Formule d'addition** : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ✓
- **Développement** : $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right)$ ✓
- **Valeurs** : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Substitution** : $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)$ ✓
- **Simplification** : $\sqrt{3} \cos x + \sin x$ ✓
- **Égalité démontrée** ✓
- **D'où viennent 2 et $\frac{\pi}{6}$** : 2 est le module de $\sqrt{3} + i$, et $\frac{\pi}{6}$ son argument ✓
- **Règle générale** : $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = \arg(a + ib)$ ✓
- **b) L'équation devient** : $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ ✓
- **On divise par 2** : $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ✓
- **Équation de référence** : $\cos u = \cos \frac{\pi}{3}$ ✓
- **Solutions** : $u = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $u = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ✓
- **Premier cas** : $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ✓
- **Second cas** : $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- **Vérification pour $x = \frac{\pi}{2}$** : $\sqrt{3} \times 0 + 1 = 1$ ✓

- **Vérification pour** $x = -\frac{\pi}{6} : \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \checkmark$
- **Intérêt de la méthode** : sans la transformation, l'équation mêle cos et sin et n'est pas résoluble directement $\checkmark$

Réponse. a) démontré par la formule d'addition · b) $S = \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 15 - Amplitude et déphasage d'un signal

- **a) Outil** : $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = U_{\max} \cos(\omega t - \varphi)$ avec $U_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = \arg(a + ib) \checkmark$
- **Repérage** : $a = 5$ et $b = 5\sqrt{3} \checkmark$
- **Complexe associé** : $5 + 5i\sqrt{3} \checkmark$
- **Module** : $\sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} \checkmark$
- **Amplitude** :

$$U_{\max} = 10 \text{ V}$$

- **Cosinus de l'argument** : $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} \checkmark$
- **Sinus de l'argument** : $\frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$
- **Angle** : $\varphi = \frac{\pi}{3} \checkmark$
- **Écriture obtenue** :

$$u(t) = 10 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- **Vérification** : $10\left(\cos \omega t \cos \frac{\pi}{3} + \sin \omega t \sin \frac{\pi}{3}\right) = 5 \cos \omega t + 5\sqrt{3} \sin \omega t \checkmark$
- **b) Amplitude** : 10 V, soit le double du coefficient de cos seul $\checkmark$
- **Déphasage** : $\varphi = \frac{\pi}{3}$, soit $60^\circ \checkmark$
- **Interprétation** : le maximum est atteint quand $\omega t - \frac{\pi}{3} = 0$, donc **après** $t = 0 \checkmark$
- **Conclusion** : la tension est en **retard** de $\frac{\pi}{3}$ sur $\cos(\omega t) \checkmark$
- **c) Condition de maximum** : $\omega t - \frac{\pi}{3} = 0$ pour le premier instant positif $\checkmark$
- **Équation** : $100\pi t = \frac{\pi}{3} \checkmark$
- **On divise par π** : $100t = \frac{1}{3} \checkmark$
- **Résultat** : $t = \frac{1}{300} \text{ s} \checkmark$
- **Valeur décimale** : $t \approx 0,00333 \text{ s}$, soit environ 3 ms $\checkmark$
- **Contrôle de cohérence** : la période vaut $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02 \text{ s} \checkmark$
- **Comparaison** : $\frac{1}{300} = \frac{T}{6}$, ce qui correspond bien à un sixième de tour, soit $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \checkmark$

Réponse. a) $u(t) = 10 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ · b) $U_{\max} = 10 \text{ V}$ et $\varphi = \frac{\pi}{3}$: la tension est en retard de $\frac{\pi}{3}$ · c) $t = \frac{1}{300} \approx 3 \text{ ms}$.