

Plaquette 4 – Racines n -ièmes : équations $z^n = a$ et polygones réguliers

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Racines n -ièmes d'un complexe. Soit $a = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$. L'équation $z^n = a$ admet **exactement n solutions** :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \quad k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$$

Méthode, en trois lignes. On pose $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$, puis :

- **modules** : $r^n = \rho$, donc $r = \sqrt[n]{\rho}$ (racine réelle positive, unique) ;
- **arguments** : $n\theta = \alpha + 2k\pi$, donc $\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$;
- **tri** : k de 0 à $n-1$ donne toutes les solutions, les autres valeurs se répètent.

Racines n -ièmes de l'unité. Cas $a = 1$: ce sont les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Elles vérifient

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0 \quad (n \geq 2)$$

Lecture géométrique. Les n images sont régulièrement réparties sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$: elles forment un **polygone régulier à n côtés**. Le côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon R vaut

$$c = 2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Racines carrées par la méthode algébrique. Pour résoudre $z^2 = a + ib$ sans argument remarquable, on pose $z = x + iy$ et on écrit **trois** équations :

$$x^2 - y^2 = a \quad 2xy = b \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

La première et la troisième donnent x^2 et y^2 ; la deuxième donne le **signe relatif** de x et y .

Second degré à coefficients complexes. La formule $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$ reste valable, où δ est **une** racine carrée complexe de $\Delta = b^2 - 4ac$: il n'y a plus de discussion de signe.

Correction de l'exercice 1 – Racines quatrièmes de l'unité

- **Mise en place** : on pose $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ ✓
- **Membre de gauche** : $z^4 = r^4 e^{4i\theta}$ ✓
- **Membre de droite** : $1 = 1 \times e^{i0}$ ✓
- **Égalité des modules** : $r^4 = 1$, donc $r = 1$ ✓
- **Justification** : r est un réel strictement positif ✓
- **Égalité des arguments modulo 2π** : $4\theta = 0 + 2k\pi$ ✓
- **Donc** : $\theta = \frac{k\pi}{2}$ ✓
- **Valeurs distinctes** : $k = 0, 1, 2, 3$ ✓
- **Solutions sous forme exponentielle** :

$$1 \quad e^{i\frac{\pi}{2}} \quad e^{i\pi} \quad e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

— **Formes algébriques** : $1, i, -1, -i$ ✓

— **Ensemble des solutions** :

$$S = \{1; i; -1; -i\}$$

— **Vérification** : $i^4 = (i^2)^2 = 1$ ✓

— **Autre vérification** : $(-i)^4 = 1$ également ✓

— **Somme des solutions** : $1 + i - 1 - i = 0$ ✓

— **Explication** : c'est la propriété générale de la somme des racines n -ièmes de l'unité ✓

— **Contrôle par factorisation** : $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$ ✓

— **Développement** : $(z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$ ✓

— **Cohérence** : on retrouve les quatre solutions ✓

— **Image géométrique** : les quatre points forment un **carré** inscrit dans le cercle unité ✓

Réponse. $S = \{1; i; -1; -i\}$, de somme nulle ; les images forment un carré inscrit dans le cercle unité.

Correction de l'exercice 2 - Racines cubiques d'un réel négatif

— **Forme exponentielle du second membre** : $|-8| = 8$ et $\arg(-8) = \pi$ ✓

— **Écriture** : $-8 = 8e^{i\pi}$ ✓

— **On pose** : $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ ✓

— **Modules** : $r^3 = 8$, donc $r = 2$ ✓

— **Arguments** : $3\theta = \pi + 2k\pi$ ✓

— **Donc** : $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ ✓

— **Premier angle** : $k = 0$ donne $\theta = \frac{\pi}{3}$ ✓

— **Forme algébrique** : $2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ ✓

— **Deuxième angle** : $k = 1$ donne $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ ✓

— **Forme algébrique** : $2 \times (-1) = -2$ ✓

— **Troisième angle** : $k = 2$ donne $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ ✓

— **Forme algébrique** : $2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$ ✓

— **Ensemble des solutions** :

$$S = \{-2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$$

— **Vérification de la racine réelle** : $(-2)^3 = -8$ ✓

— **Vérification d'une racine complexe** : $(1 + i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}$ ✓

— **Puis** : $(-2 + 2i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = -2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} - 6 = -8$ ✓

— **Contrôle par la somme** : $-2 + 1 + 1 = 0$, ce qui est bien $-\frac{b}{a}$ pour $z^3 + 0z^2 + 0z + 8$ ✓

— **Piège fréquent** : conclure « $z = -2$ » et s'arrêter là — une équation de degré 3 a **trois** solutions dans $\mathbb{C}$ ✓

Réponse. $S = \{-2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$.

Correction de l'exercice 3 - Six racines et un hexagone

- **Second membre** : $64 = 64 e^{i0}$ ✓
- **Modules** : $r^6 = 64$, donc $r = \sqrt[6]{64} = 2$ ✓
- **Arguments** : $6\theta = 2k\pi$, donc $\theta = \frac{k\pi}{3}$ ✓
- **Six angles** : $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ ✓
- **Première solution** : 2 ✓
- **Deuxième** : $2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ ✓
- **Troisième** : $2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$ ✓
- **Quatrième** : -2 ✓
- **Cinquième** : $-1 - i\sqrt{3}$ ✓
- **Sixième** : $1 - i\sqrt{3}$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{\pm 2; \pm 1 \pm i\sqrt{3}\}$$

- **Nature du polygone** : six points régulièrement répartis sur le cercle de rayon 2, c'est un **hexagone régulier** ✓
- **Longueur du côté** : $c = 2R \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times 2 \times \frac{1}{2}$ ✓
- **Résultat** : $c = 2$ ✓
- **Remarque** : dans un hexagone régulier, le côté est égal au rayon ✓
- **Périmètre** :

$$P = 6 \times 2 = 12$$

- **Aire** : l'hexagone est formé de six triangles équilatéraux de côté 2 ✓
- **Aire d'un triangle équilatéral de côté c** : $\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ ✓
- **Aire totale** :

$$A = 6\sqrt{3} \approx 10,39$$

- **Contrôle de plausibilité** : l'aire du disque circonscrit vaut $4\pi \approx 12,57$ ✓
- **Cohérence** : $10,39 < 12,57$, l'hexagone est bien inscrit ✓

Réponse. $S = \{2; 1 + i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}; -2; -1 - i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$; hexagone régulier de côté 2, de périmètre 12 et d'aire $6\sqrt{3} \approx 10,39$.

Correction de l'exercice 4 - Racines quatrièmes d'un réel négatif

- **Second membre** : $|-16| = 16$ et $\arg(-16) = \pi$ ✓
- **Écriture** : $-16 = 16 e^{i\pi}$ ✓
- **Modules** : $r^4 = 16$, donc $r = 2$ ✓
- **Arguments** : $4\theta = \pi + 2k\pi$ ✓
- **Donc** : $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ✓
- **Quatre angles** : $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ ✓
- **Observation** : aucun n'est multiple de $\frac{\pi}{2}$, il n'y a donc **aucune solution réelle ni imaginaire pure** ✓
- **Première solution** : $2 e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ✓

- **Forme algébrique** : $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ✓
- **Les trois autres** : elles s'en déduisent par multiplication successive par i ✓
- **Justification** : multiplier par i ajoute $\frac{\pi}{2}$ à l'argument ✓
- **Solutions** :

$$S = \left\{ \sqrt{2} + i\sqrt{2} ; -\sqrt{2} + i\sqrt{2} ; -\sqrt{2} - i\sqrt{2} ; \sqrt{2} - i\sqrt{2} \right\}$$

- **Vérification** : $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 2 + 4i - 2 = 4i$ ✓
- **On élève encore au carré** : $(4i)^2 = -16$ ✓
- **Cohérence** : l'équation est satisfaite ✓
- **Contrôle des conjugués** : les coefficients de $z^4 + 16$ sont réels ✓
- **Conséquence** : les solutions vont par paires conjuguées, ce qui est bien le cas ✓
- **Image géométrique** : un carré de « rayon » 2, tourné de 45° par rapport à celui de $z^4 = 16$ ✓

Réponse. $S = \left\{ \pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2} \right\}$, soit les quatre complexes $2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$.

Correction de l'exercice 5 - Racines cubiques d'un imaginaire pur

- **Second membre** : $|27i| = 27$ et $\arg(27i) = \frac{\pi}{2}$ ✓
- **Écriture** : $27i = 27e^{i\frac{\pi}{2}}$ ✓
- **Modules** : $r^3 = 27$, donc $r = 3$ ✓
- **Arguments** : $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ✓
- **Donc** : $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ ✓
- **Premier angle** : $\frac{\pi}{6}$ ✓
- **Forme algébrique** : $3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ ✓
- **Deuxième angle** : $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ ✓
- **Valeurs** : $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Forme algébrique** : $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ ✓
- **Troisième angle** : $\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$ ✓
- **Forme algébrique** : $3 \times (-i) = -3i$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i ; -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i ; -3i \right\}$$

- **Vérification de la plus simple** : $(-3i)^3 = -27i^3$ ✓
- **Calcul** : $i^3 = -i$, donc $-27 \times (-i) = 27i$ ✓
- **Contrôle des modules** : $\sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$ ✓
- **Contrôle par la somme** : $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 0 = 0$ pour la partie réelle ✓
- **Partie imaginaire** : $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 = 0$ ✓
- **Cohérence** : la somme est nulle, conforme à $z^3 - 27i$ sans terme en z^2 ✓

Réponse. $S = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i; -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i; -3i \right\}.$

Correction de l'exercice 6 - Racines carrées par la méthode algébrique

- **Pourquoi ne pas utiliser l'exponentielle** : l'argument de $3 + 4i$ n'est pas un angle remarquable ✓
- **Méthode algébrique** : on pose $z = x + iy$ avec x et y réels ✓
- **Carré** : $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ✓
- **Première équation, parties réelles** : $x^2 - y^2 = 3$ ✓
- **Deuxième équation, parties imaginaires** : $2xy = 4$ ✓
- **Troisième équation, la clé** : on égale aussi les **modules** ✓
- **Module du carré** : $|z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$ ✓
- **Module de $3 + 4i$** : $\sqrt{9 + 16} = 5$ ✓
- **Troisième équation** : $x^2 + y^2 = 5$ ✓
- **Somme des première et troisième** : $2x^2 = 8$ ✓
- **Donc** : $x^2 = 4$, soit $x = 2$ ou $x = -2$ ✓
- **Différence des deux mêmes** : $2y^2 = 2$ ✓
- **Donc** : $y^2 = 1$, soit $y = 1$ ou $y = -1$ ✓
- **Choix des signes** : la deuxième équation donne $xy = 2 > 0$ ✓
- **Conclusion** : x et y sont de **même signe** ✓
- **Solutions retenues** :

$$z = 2 + i \quad \text{ou} \quad z = -2 - i$$
- **Vérification** : $(2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$ ✓
- **Vérification de l'autre** : $(-2 - i)^2 = (2 + i)^2 = 3 + 4i$ ✓
- **Couples rejetés** : $2 - i$ et $-2 + i$ donnent $3 - 4i$, et non $3 + 4i$ ✓
- **À retenir** : sans la troisième équation, le système est difficile ; avec elle, il est linéaire en x^2 et y^2 ✓

Réponse. $z = 2 + i$ ou $z = -2 - i$.

Correction de l'exercice 7 - Une seconde racine carrée algébrique

- **On pose** : $z = x + iy$ ✓
- **Parties réelles** : $x^2 - y^2 = -5$ ✓
- **Parties imaginaires** : $2xy = 12$, donc $xy = 6$ ✓
- **Module** : $\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ ✓
- **Troisième équation** : $x^2 + y^2 = 13$ ✓
- **Somme** : $2x^2 = -5 + 13 = 8$ ✓
- **Donc** : $x^2 = 4$, soit $x = \pm 2$ ✓
- **Différence** : $2y^2 = 13 + 5 = 18$ ✓
- **Donc** : $y^2 = 9$, soit $y = \pm 3$ ✓
- **Signes** : $xy = 6 > 0$, donc x et y ont le même signe ✓
- **Solutions** :

$$z = 2 + 3i \quad \text{ou} \quad z = -2 - 3i$$
- **Vérification** : $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2$ ✓
- **Calcul** : $4 - 9 + 12i = -5 + 12i$ ✓

- **Contrôle des modules** : $|2 + 3i| = \sqrt{13}$ ✓
- **Carré du module** : 13, et $|-5 + 12i| = 13$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Remarque** : (5 ; 12 ; 13) est un triplet pythagoricien, ce qui explique le module entier ✓
- **Généralisation** : la méthode marche pour **tout** complexe, remarquable ou non ✓

Réponse. $z = 2 + 3i$ ou $z = -2 - 3i$.

Correction de l'exercice 8 - Second degré à coefficients complexes

- **Repérage** : $a = 1$, $b = -(3 + i)$, $c = 2 + 2i$ ✓
- **Avertissement** : les coefficients ne sont **pas** réels, la discussion de signe du discriminant n'a plus de sens ✓
- **Discriminant** : $\Delta = b^2 - 4ac = (3 + i)^2 - 4(2 + 2i)$ ✓
- **Carré** : $(3 + i)^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$ ✓
- **Second terme** : $4(2 + 2i) = 8 + 8i$ ✓
- **Différence** : $8 + 6i - 8 - 8i$ ✓
- **Discriminant** :

$$\Delta = -2i$$

- **Il faut une racine carrée de Δ** : on pose $\delta = x + iy$ ✓
- **Parties réelles** : $x^2 - y^2 = 0$ ✓
- **Parties imaginaires** : $2xy = -2$, donc $xy = -1$ ✓
- **Module** : $|-2i| = 2$, donc $x^2 + y^2 = 2$ ✓
- **Résolution** : $x^2 = 1$ et $y^2 = 1$ ✓
- **Signes opposés** : $xy < 0$ ✓
- **Une racine carrée** : $\delta = 1 - i$ ✓
- **Vérification** : $(1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$ ✓
- **Formule des solutions** : $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$, ici $\frac{(3 + i) \pm (1 - i)}{2}$ ✓
- **Première solution** : $\frac{3 + i + 1 - i}{2} = \frac{4}{2} = 2$ ✓
- **Seconde solution** : $\frac{3 + i - 1 + i}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{2; 1 + i\}$$

- **Contrôle par la somme** : $2 + 1 + i = 3 + i$, et $-\frac{b}{a} = 3 + i$ ✓
- **Contrôle par le produit** : $2(1 + i) = 2 + 2i$, et $\frac{c}{a} = 2 + 2i$ ✓
- **Observation** : les deux solutions ne sont pas conjuguées — c'est normal, les coefficients ne sont pas réels ✓

Réponse. $\Delta = -2i$, $\delta = 1 - i$, et $S = \{2; 1 + i\}$.

Correction de l'exercice 9 - Une équation bicarrée

- **Changement d'inconnue** : on pose $Z = z^2$ ✓
- **Équation obtenue** : $Z^2 + Z + 1 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $1 - 4 = -3$ ✓
- **Coefficients réels et $\Delta < 0$** : deux solutions conjuguées ✓
- **Racine de l'opposé** : $\sqrt{3}$ ✓

— **Solutions en Z :**

$$Z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad Z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

— **Modules de ces deux nombres :** $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \checkmark$

— **Arguments :** $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3} \quad \checkmark$

— **Formes exponentielles :** $Z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \checkmark$

— **Premier cas :** $z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \checkmark$

— **Modules :** $|z| = 1 \quad \checkmark$

— **Arguments :** $2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \quad \checkmark$

— **Solutions :** $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et son opposé $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$

— **Second cas :** par conjugaison, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$

— **Ensemble des solutions :**

$$S = \left\{ \pm \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

— **Vérification d'une solution :** pour $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \quad \checkmark$

— **Somme :** $e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 \quad \checkmark$

— **Or ce sont les trois racines cubiques de l'unité**, de somme nulle $\checkmark$

— **Cohérence :** l'équation est satisfaite $\checkmark$

— **Remarque de structure :** $z^4 + z^2 + 1 = \frac{z^6 - 1}{z^2 - 1}$, donc les solutions sont les racines sixièmes de l'unité qui ne sont pas des racines carrées de l'unité $\checkmark$

Réponse. $S = \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Correction de l'exercice 10 - Racines cinquièmes d'un complexe quelconque

— **Modules :** $r^5 = 32$, donc $r = 2 \quad \checkmark$

— **Justification :** $\sqrt[5]{32} = 2$ car $2^5 = 32 \quad \checkmark$

— **Arguments :** $5\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \checkmark$

— **Donc :**

$$\theta_k = \frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} \quad k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

— **Écriture commune du pas :** $\frac{2k\pi}{5} = \frac{6k\pi}{15} \quad \checkmark$

— **Premier angle :** $\frac{2\pi}{15} \quad \checkmark$

— **Deuxième :** $\frac{8\pi}{15} \quad \checkmark$

— **Troisième :** $\frac{14\pi}{15} \quad \checkmark$

— **Quatrième :** $\frac{20\pi}{15} = \frac{4\pi}{3} \quad \checkmark$

— **Cinquième :** $\frac{26\pi}{15} \quad \checkmark$

— **Solutions :**

$$z_k = 2 e^{i(\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5})}$$

- **Comptage demandé** : $\pi = \frac{15\pi}{15}$ ✓
- **Angles inférieurs ou égaux** : $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{8\pi}{15}$ et $\frac{14\pi}{15}$ ✓
- **Angles supérieurs** : $\frac{20\pi}{15}$ et $\frac{26\pi}{15}$ ✓
- **Réponse** : trois solutions ont leur argument dans $[0; \pi]$ ✓
- **Interprétation** : trois points au-dessus de l'axe des réels, deux en dessous ✓
- **Contrôle de la somme** : les cinq solutions sont les sommets d'un pentagone régulier centré en O ✓
- **Conséquence** : leur somme est nulle ✓
- **Contrôle d'une solution** : $(2 e^{i\frac{2\pi}{15}})^5 = 32 e^{i\frac{10\pi}{15}} = 32 e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ✓

Réponse. $z_k = 2 e^{i(\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5})}$ pour k de 0 à 4 ; trois d'entre elles ont un argument dans $[0; \pi]$.

Correction de l'exercice 11 - Produit des racines n -ièmes de l'unité

- **Point de départ** : les racines n -ièmes de l'unité sont les solutions de $z^n - 1 = 0$ ✓
- **Forme factorisée** : $z^n - 1 = (z - \omega_0)(z - \omega_1) \cdots (z - \omega_{n-1})$ ✓
- **Astuce** : on évalue les deux membres en $z = 0$ ✓
- **Membre de gauche** : $0^n - 1 = -1$ ✓
- **Membre de droite** : $(-\omega_0)(-\omega_1) \cdots (-\omega_{n-1})$ ✓
- **On sort les signes** : il y a n facteurs (-1) ✓
- **Expression** : $(-1)^n \times \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$ ✓
- **Égalité obtenue** : $(-1)^n \times \prod \omega_k = -1$ ✓
- **On divise par $(-1)^n$** :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = \frac{-1}{(-1)^n} = (-1)^{1-n} = (-1)^{n+1}$$

- **Justification de la dernière écriture** : $(-1)^{1-n}$ et $(-1)^{n+1}$ ont la même parité d'exposant ✓
- **Vérification pour $n = 4$** : les racines sont $1, i, -1, -i$ ✓
- **Produit** : $1 \times i \times (-1) \times (-i) = i \times i = -1$ ✓
- **Formule** : $(-1)^5 = -1$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Vérification pour $n = 5$** : produit des cinq racines ✓
- **Par la formule** : $(-1)^6 = 1$ ✓
- **Contrôle par les arguments** : la somme des arguments vaut $\frac{2\pi}{5}(0 + 1 + 2 + 3 + 4) = \frac{2\pi}{5} \times 10 = 4\pi$ ✓
- **Donc** : le produit a pour argument $4\pi \equiv 0$ et pour module 1 ✓
- **Cohérence** : le produit vaut bien 1 ✓

Réponse. En évaluant $z^n - 1 = \prod (z - \omega_k)$ en $z = 0$: $\prod \omega_k = (-1)^{n+1}$; soit -1 pour $n = 4$ et 1 pour $n = 5$.

Correction de l'exercice 12 - Le côté d'un polygone régulier

- **a) Affixes** : A_0 a pour affixe 1 et A_1 a pour affixe $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ✓
- **Distance** : $A_0A_1 = \left| e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1 \right|$ ✓
- **Outil** : la factorisation par l'angle moitié ✓
- **Formule** : $\left| 1 - e^{i\theta} \right| = 2 \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|$ ✓
- **Ici** : $\theta = \frac{2\pi}{n}$, donc $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{n}$ ✓
- **Signe** : pour $n \geq 2$, on a $0 < \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\sin \left(\frac{\pi}{n} \right) > 0$ ✓
- **Conséquence** : la valeur absolue est superflue ✓
- **Résultat** :

$$A_0A_1 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

- **Contrôle pour $n = 4$** : $2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ ✓
- **Vérification directe** : $|i - 1| = \sqrt{2}$ ✓
- **Contrôle pour $n = 6$** : $2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$ ✓
- **Cohérence** : dans un hexagone régulier, le côté vaut le rayon ✓
- **b) Périmètre** : $P_n = n \times 2 \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)$ ✓
- **Pour $n = 12$** : $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$ ✓
- **Sinus** : $\sin \frac{\pi}{12} \approx 0,258819$ ✓
- **Côté** : $2 \times 0,258819 \approx 0,517638$ ✓
- **Périmètre** :

$$P_{12} \approx 6,212$$

- **Comparaison** : $2\pi \approx 6,283$ ✓
 - **Écart** : environ 1,1 % ✓
 - **Interprétation** : le périmètre du polygone approche celui du cercle par **défaut**, et de mieux en mieux ✓
 - **Limite** : $n \times 2 \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \rightarrow 2\pi$ quand $n \rightarrow +\infty$ ✓
 - **Justification** : $\sin u \sim u$ au voisinage de 0, avec $u = \frac{\pi}{n}$ ✓
 - **Note historique** : c'est exactement la méthode d'Archimède pour encadrer π ✓
- Réponse.** a) $A_0A_1 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)$ · b) $P_{12} \approx 6,212$, contre $2\pi \approx 6,283$: un écart d'environ 1,1 %.

Correction de l'exercice 13 - Une équation mêlant z et son conjugué

- **Première étape** : passer aux modules ✓
- **Membre de gauche** : $|z^5| = |z|^5$ ✓
- **Membre de droite** : $|\bar{z}| = |z|$ ✓
- **Équation** : $|z|^5 = |z|$ ✓
- **Factorisation** : $|z|(|z|^4 - 1) = 0$ ✓
- **Deux cas** : $|z| = 0$ ou $|z| = 1$ ✓
- **Justification** : $|z|$ est positif, donc $|z|^4 = 1$ donne $|z| = 1$ ✓

- **Premier cas** : $z = 0$, qui convient car $0^5 = 0 = \overline{0}$ ✓
- **Second cas** : $|z| = 1$, donc $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ✓
- **On remplace** : $z^5 = \frac{1}{z}$ ✓
- **On multiplie par z** (licite, $z \neq 0$) :

$$z^6 = 1$$

- **Solutions** : les six racines sixièmes de l'unité ✓
- **Liste** : $e^{i\frac{k\pi}{3}}$ pour k de 0 à 5 ✓
- **Formes algébriques** : $1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Nombre total de solutions** : $6 + 1 = 7$ ✓
- **Ensemble** :

$$S = \{0\} \cup \left\{ e^{i\frac{k\pi}{3}}, 0 \leq k \leq 5 \right\}$$

- **Vérification pour $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$** : $z^5 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ✓
- **Conjugué** : $\bar{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ✓
- **Cohérence** : l'équation est satisfaite ✓
- **Piège** : oublier $z = 0$, ou croire que l'équation est de degré 5 et n'a que 5 solutions — elle n'est pas polynomiale en z seul ✓

Réponse. $S = \{0\}$ réuni aux six racines sixièmes de l'unité, soit **sept** solutions.

Correction de l'exercice 14 - Valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$

- **a) Observation** : $\omega^5 = e^{i2\pi} = 1$ ✓
- **Conséquence** : $\omega^4 = \frac{1}{\omega} = \overline{\omega}$, car $|\omega| = 1$ ✓
- **Somme** : $\omega + \overline{\omega} = 2\operatorname{Re}(\omega)$ ✓
- **Résultat** :

$$S = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$$

- **De même** : $\omega^3 = \overline{\omega^2}$ ✓
- **Argument de ω^2** : $\frac{4\pi}{5}$ ✓
- **Résultat** : $T = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$ ✓
- **b) Somme** : $S + T = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ ✓
- **Or** : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, somme des racines cinquièmes de l'unité ✓
- **Donc** :

$$S + T = -1$$

- **Produit** : $ST = (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3)$ ✓
- **Développement** : $\omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7$ ✓
- **Réduction des exposants modulo 5** : $\omega^6 = \omega$ et $\omega^7 = \omega^2$ ✓
- **Expression** : $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ ✓
- **Donc** :

$$ST = -1$$

- **c) S et T sont donc les racines de $X^2 - (S + T)X + ST = 0$** ✓
- **Équation** : $X^2 + X - 1 = 0$ ✓

- **Discriminant** : $1 + 4 = 5$ ✓
- **Racines** : $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ✓
- **Choix** : $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$ est dans le premier quadrant, donc $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$ et $S > 0$ ✓
- **Donc** : $S = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ✓
- **Résultat** :

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

- **Contrôle numérique** : $\frac{2,2360679 - 1}{4} \approx 0,309017$ ✓
- **Valeur à la calculatrice** : $\cos 72^\circ \approx 0,309017$ ✓
- **Bonus** : $T = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, donc $\cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} \approx -0,809$ ✓

Réponse. a) $\omega^4 = \bar{\omega}$ et $\omega^3 = \bar{\omega}^2$ · b) $S + T = -1$ et $ST = -1$ · c) $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \approx 0,309$.

Correction de l'exercice 15 - Un réseau triphasé

- **a) Écriture de la première** : $\cos(\omega t) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t})$ ✓
- **Donc** : $u_1(t) = \operatorname{Re}(U e^{i\omega t})$ ✓
- **Deuxième tension** : $\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t} e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$ ✓
- **Reconnaissance** : $e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j} = j^2$ ✓
- **Justification** : $j^3 = 1$, donc $j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$ ✓
- **Donc** : $u_2(t) = \operatorname{Re}(U e^{i\omega t} j^2)$ ✓
- **Troisième tension** : $e^{-i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ ✓
- **Donc** : $u_3(t) = \operatorname{Re}(U e^{i\omega t} j)$ ✓
- **b) Somme** : la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles ✓
- **Factorisation** :

$$u_1 + u_2 + u_3 = \operatorname{Re}\left(U e^{i\omega t} (1 + j^2 + j)\right)$$

- **Point clé** : $1, j$ et j^2 sont les trois racines cubiques de l'unité ✓
- **Leur somme** : $1 + j + j^2 = 0$ ✓
- **Démonstration rapide** : j est solution de $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$ et $j \neq 1$ ✓
- **Donc** : $j^2 + j + 1 = 0$ ✓
- **Conclusion** : le facteur est nul, donc

$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = 0$$

- **Valable pour tout t** : aucune hypothèse n'a été faite sur t ✓
- **Contrôle numérique en $\omega t = 0$** : $U + U \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + U \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ ✓
- **Valeurs** : $U - \frac{U}{2} - \frac{U}{2} = 0$ ✓
- **Contrôle en $\omega t = \frac{\pi}{2}$** : $0 + U \sin \frac{2\pi}{3} + U \sin \frac{4\pi}{3}$ ✓
- **Valeurs** : $U \frac{\sqrt{3}}{2} - U \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ✓

- **c) Interprétation** : dans une installation **équilibrée**, les trois courants s'annulent aussi à chaque instant ✓
- **Conséquence pratique** : le conducteur de neutre ne transporte **aucun courant** ✓
- **Application industrielle** : c'est ce qui permet, sur les lignes haute tension triphasées, de se passer d'un quatrième câble de forte section ✓
- **Limite** : si les trois phases sont déséquilibrées, la somme n'est plus nulle et le neutre redevient nécessaire ✓

Réponse. a) $u_1 = \operatorname{Re}(Ue^{i\omega t})$, $u_2 = \operatorname{Re}(Ue^{i\omega t}j^2)$, $u_3 = \operatorname{Re}(Ue^{i\omega t}j)$ · b) la somme vaut $\operatorname{Re}(Ue^{i\omega t}(1 + j + j^2)) = 0$ · c) en régime équilibré, le neutre ne transporte aucun courant.