Plaquette 4 – Racines n-ièmes : équations z^n = a et polygones réguliers

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Racines n-ièmes d'un complexe. Soit $a = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$. L'équation $z^n = a$ admet **exactement n solutions** :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\;\mathrm{e}^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \qquad k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n-1\}$$

Méthode, en trois lignes. On pose $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$, puis :

— **modules** : $r^n = \rho$, donc $r = \sqrt[n]{\rho}$ (racine réelle positive, unique) ;

— **arguments** : $n\theta = \alpha + 2k\pi$, donc $\theta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$;

— **tri** : k de 0 à $n-1$ donne toutes les solutions, les autres valeurs se répètent.

Racines n-ièmes de l'unité. Cas $a = 1$: ce sont les $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Elles vérifient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0 \qquad (n \geq 2)$$

Lecture géométrique. Les n images sont régulièrement réparties sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$: elles forment un **polygone régulier à n côtés**. Le côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon R vaut

$$c = 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Racines carrées par la méthode algébrique. Pour résoudre $z^2 = a + ib$ sans argument remarquable, on pose $z = x + iy$ et on écrit **trois** équations :

$$x^2 - y^2 = a \qquad 2xy = b \qquad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

La première et la troisième donnent x^2 et y^2 ; la deuxième donne le **signe relatif** de x et y.

Second degré à coefficients complexes. La formule $z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ reste valable, où δ est **une** racine carrée complexe de $\Delta = b^2 - 4ac$: il n'y a plus de discussion de signe.

Correction de l'exercice 1 – Racines quatrièmes de l'unité

On cherche $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$. L'équation $r^4\,\mathrm{e}^{4i\theta} = 1\,\mathrm{e}^{i0}$ équivaut à $r^4 = 1$ et $4\theta = 2k\pi$, soit $r = 1$ et $\theta = \dfrac{k\pi}{2}$; les valeurs $k = 0$, 1, 2, 3 donnent les quatre solutions :

$$1 \qquad \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \qquad \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

Leur somme $1 + i - 1 - i$ est nulle, comme celle de toutes les racines n-ièmes de l'unité. **Contrôle** : $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$. Les quatre points forment un carré inscrit dans le cercle unité.

Réponse. $S = \{1\,; i\,; -1\,; -i\}$, de somme nulle ; les images forment un carré inscrit dans le cercle unité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Racines cubiques d’un réel négatif

On écrit $-8 = 8\,\mathrm{e}^{i\pi}$ et l’on cherche $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$: $r^3 = 8$ et $3\theta = \pi + 2k\pi$, d’où $r = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$. Les trois valeurs $\dfrac{\pi}{3}$, π et $\dfrac{5\pi}{3}$ donnent

$$2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3} \qquad 2\,\mathrm{e}^{i\pi} = -2 \qquad 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$$

Contrôle : $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $\left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right) = -8$. Une équation de degré 3 a trois solutions dans $\mathbb{C}$: s’arrêter à $z = -2$ serait incomplet.

Réponse. $S = \left\{-2\,;\, 1 + i\sqrt{3}\,;\, 1 - i\sqrt{3}\right\}$.

Correction de l’exercice 3 – Six racines et un hexagone

$z^6 = 64 = 64\,\mathrm{e}^{i0}$ donne $r^6 = 64$, soit $r = 2$, et $6\theta = 2k\pi$, soit $\theta = \dfrac{k\pi}{3}$ pour k de 0 à 5. Les solutions sont

$$\pm 2 \qquad \pm\left(1 + i\sqrt{3}\right) \qquad \pm\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

Ces six points sont régulièrement répartis sur le cercle de rayon 2 : ils forment un hexagone régulier, dont le côté vaut $2 \times 2\sin\dfrac{\pi}{6} = 2$, égal au rayon. Le périmètre vaut 12.

L’hexagone se découpe en six triangles équilatéraux de côté 2, d’aire $\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ chacun : l’aire totale vaut $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$. **Contrôle** : c’est moins que l’aire du disque circonscrit, $4\pi \approx 12{,}57$.

Réponse. $S = \left\{2\,;\, 1 + i\sqrt{3}\,;\, -1 + i\sqrt{3}\,;\, -2\,;\, -1 - i\sqrt{3}\,;\, 1 - i\sqrt{3}\right\}$; hexagone régulier de côté 2, de périmètre 12 et d’aire $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$.

Correction de l’exercice 4 – Racines quatrièmes d’un réel négatif

On écrit $-16 = 16\,\mathrm{e}^{i\pi}$: avec $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, on obtient $r^4 = 16$, donc $r = 2$, et $4\theta = \pi + 2k\pi$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$. Les quatre angles sont $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$: aucune solution n’est réelle ni imaginaire pure.

$$2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

et les trois autres s’en déduisent en multipliant par i, ce qui ajoute $\dfrac{\pi}{2}$ à l’argument : $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. **Contrôle** : $\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^2 = 4i$ et $(4i)^2 = -16$. Les solutions vont par paires conjuguées, car $z^4 + 16$ est à coefficients réels.

Réponse. $S = \left\{\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}\right\}$, soit les quatre complexes $2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}$.

Correction de l’exercice 5 – Racines cubiques d’un imaginaire pur

On écrit $27i = 27\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$. Avec $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$: $r^3 = 27$, donc $r = 3$, et $3\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$. Les trois angles $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$ donnent

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \qquad -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \qquad -3i$$

Contrôle : $(-3i)^3 = -27i^3 = 27i$. La somme des trois solutions est nulle (parties réelles $\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, parties imaginaires $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} - 3$), ce qui est cohérent avec l’absence de terme en z^2 dans $z^3 - 27i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $S = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\,;\, -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\,;\, -3i \right\}$.

Correction de l'exercice 6 – Racines carrées par la méthode algébrique

L'argument de $3+4i$ n'est pas un angle remarquable : on passe par la forme algébrique, $z = x + iy$. L'égalité $z^2 = 3+4i$ donne les parties réelles et imaginaires, et l'égalité des modules ($|z|^2 = |3+4i| = 5$) une troisième équation :

$$x^2 - y^2 = 3 \qquad 2xy = 4 \qquad x^2 + y^2 = 5$$

En ajoutant puis en soustrayant la première et la troisième : $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$. Comme $xy = 2 > 0$, x et y ont le même signe : $z = 2+i$ ou $z = -2-i$. **Contrôle** : $(2+i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3+4i$. Les couples de signes contraires, $2-i$ et $-2+i$, ont pour carré $3-4i$.

Réponse. $z = 2+i$ ou $z = -2-i$.

Correction de l'exercice 7 – Une seconde racine carrée algébrique

Avec $z = x+iy$, l'égalité $z^2 = -5+12i$ et celle des modules ($|-5+12i| = 13$) donnent

$$x^2 - y^2 = -5 \qquad xy = 6 \qquad x^2 + y^2 = 13$$

d'où $x^2 = 4$ et $y^2 = 9$. Comme $xy = 6 > 0$, x et y ont le même signe : $z = 2+3i$ ou $z = -2-3i$. **Contrôle** : $(2+3i)^2 = 4 - 9 + 12i = -5+12i$. Le module entier vient du triplet pythagoricien $(5\,;12\,;13)$.

Réponse. $z = 2+3i$ ou $z = -2-3i$.

Correction de l'exercice 8 – Second degré à coefficients complexes

Les coefficients ne sont pas réels : on ne discute plus le signe du discriminant, on en cherche une racine carrée. Ici

$$\Delta = (3+i)^2 - 4(2+2i) = 8 + 6i - 8 - 8i = -2i$$

Avec $\delta = x+iy$ et $\delta^2 = -2i$: $x^2 - y^2 = 0$, $xy = -1$, $x^2 + y^2 = 2$, donc $x^2 = y^2 = 1$ avec x et y de signes contraires ; on prend $\delta = 1-i$. Les solutions sont $\frac{(3+i) \pm (1-i)}{2}$, soit 2 et $1+i$.

Contrôle : la somme $3+i = -\frac{b}{a}$ et le produit $2+2i = \frac{c}{a}$. Les solutions ne sont pas conjuguées, ce qui est normal ici.

Réponse. $\Delta = -2i$, $\delta = 1-i$, et $S = \{2\,;1+i\}$.

Correction de l'exercice 9 – Une équation bicarrée

On pose $Z = z^2$: l'équation devient $Z^2 + Z + 1 = 0$, de discriminant -3, d'où

$$Z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$$

Pour $z^2 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$, on trouve $|z| = 1$ et $2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, soit $z = \pm\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = \pm\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; l'autre équation donne les conjugués. Les quatre solutions sont $\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Contrôle** pour $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$: $z^4 + z^2 + 1 = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} + \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 = 0$, somme des trois racines cubiques de l'unité. En effet $z^4 + z^2 + 1 = \frac{z^6 - 1}{z^2 - 1}$: ce sont les racines sixièmes de l'unité autres que ± 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $S = \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Correction de l'exercice 10 – Racines cinquièmes d'un complexe quelconque

Avec $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$: $r^5 = 32$, donc $r = 2$; et $5\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, donc

$$\theta_k = \frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{(2+6k)\pi}{15} \qquad k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$$

Les cinq arguments sont $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{8\pi}{15}$, $\frac{14\pi}{15}$, $\frac{20\pi}{15}$ et $\frac{26\pi}{15}$. Comme $\pi = \frac{15\pi}{15}$, trois d'entre eux sont dans $[0\,;\pi]$: trois points au-dessus de l'axe des réels, deux en dessous. **Contrôle** : $\left(2\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{15}}\right)^5 = 32\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. Les cinq points forment un pentagone régulier centré en O.

Réponse. $z_k = 2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right)}$ pour k de 0 à 4 ; trois d'entre elles ont un argument dans $[0\,;\pi]$.

Correction de l'exercice 11 – Produit des racines n-ièmes de l'unité

Les racines n-ièmes de l'unité sont les n racines du polynôme $z^n - 1$, qui se factorise donc en $(z-\omega_0)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{n-1})$. On évalue les deux membres en $z = 0$:

$$-1 = (-\omega_0)(-\omega_1)\cdots(-\omega_{n-1}) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$$

d'où $\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = \frac{-1}{(-1)^n} = (-1)^{n+1}$. **Vérification** pour $n = 4$:
$1 \times i \times (-1) \times (-i) = -1 = (-1)^5$. Pour $n = 5$, le produit a pour module 1 et pour argument $\frac{2\pi}{5}(0+1+2+3+4) = 4\pi$, donc il vaut $1 = (-1)^6$.

Réponse. En évaluant $z^n - 1 = \prod (z - \omega_k)$ en $z = 0$: $\prod \omega_k = (-1)^{n+1}$; soit -1 pour $n = 4$ et 1 pour $n = 5$.

Correction de l'exercice 12 – Le côté d'un polygone régulier

a) A_0 a pour affixe 1 et A_1 pour affixe $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$. D'après la factorisation par l'angle moitié, $\left|1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$; avec $\theta = \frac{2\pi}{n}$,

$$A_0A_1 = 2\left|\sin\tfrac{\pi}{n}\right| = 2\sin\tfrac{\pi}{n}$$

car $0 < \frac{\pi}{n} \le \frac{\pi}{2}$ pour $n \ge 2$. **Contrôle** : pour $n = 4$, $2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} = |i - 1|$; pour $n = 6$, le côté vaut 1, égal au rayon.

b) Le périmètre vaut $P_n = 2n\sin\frac{\pi}{n}$, soit $P_{12} = 24\sin\frac{\pi}{12} \approx 24 \times 0{,}258819 \approx 6{,}212$. C'est un peu moins que la circonférence $2\pi \approx 6{,}283$ (environ 1,1 % d'écart) : le polygone approche le cercle par défaut, de mieux en mieux quand n augmente. C'est la méthode d'Archimède pour encadrer π.

Réponse. a) $A_0A_1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ · b) $P_{12} \approx 6{,}212$, contre $2\pi \approx 6{,}283$: un écart d'environ 1,1 %.

Correction de l'exercice 13 – Une équation mêlant z et son conjugué

On passe aux modules : $|z|^5 = |\overline{z}| = |z|$, soit $|z|\left(|z|^4 - 1\right) = 0$, donc $|z| = 0$ ou $|z| = 1$. Si $z = 0$, l'équation est vérifiée. Si $|z| = 1$, alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$ et l'équation devient $z^5 = \frac{1}{z}$,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c'est-à-dire

$$z^6 = 1$$

dont les solutions sont les six racines sixièmes de l'unité, $\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}$ pour $0 \leq k \leq 5$; elles sont de module 1 et conviennent. Il y a donc sept solutions : 0 et ces six nombres. **Contrôle** pour $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$: $z^5 = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} = \overline{z}$. L'équation n'est pas polynomiale en z : rien n'imposait cinq solutions.

Réponse. $S = \{0\}$ réuni aux six racines sixièmes de l'unité, soit **sept** solutions.

Correction de l'exercice 14 – Valeur exacte de cos(2π/5)

a) $\omega^5 = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$ et $|\omega| = 1$, donc $\omega^4 = \dfrac{1}{\omega} = \overline{\omega}$ et $S = \omega + \overline{\omega} = 2\mathrm{Re}(\omega) = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$. De même $\omega^3 = \overline{\omega^2}$ et $T = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

b) La somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, donc $S + T = -1$. En développant, $ST = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1$, car $\omega^5 = 1$.

c) S et T sont donc les racines de $X^2 + X - 1 = 0$, de discriminant 5 : ce sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $\dfrac{2\pi}{5}$ est dans le premier quadrant, $S > 0$:

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \approx 0{,}309$$

Contrôle : la calculatrice donne $\cos 72° \approx 0{,}309017$. On obtient aussi $\cos\dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Réponse. a) $\omega^4 = \overline{\omega}$ et $\omega^3 = \overline{\omega^2}$ · b) $S + T = -1$ et $ST = -1$ · c) $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}309$.

Correction de l'exercice 15 – Un réseau triphasé

a) Comme $\cos x = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ix}\right)$ et $\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} = j^2$, $\mathrm{e}^{-i\frac{4\pi}{3}} = j$ (car $j^3 = 1$) :

$$u_1 = \mathrm{Re}\left(U\mathrm{e}^{i\omega t}\right) \qquad u_2 = \mathrm{Re}\left(U\mathrm{e}^{i\omega t}j^2\right) \qquad u_3 = \mathrm{Re}\left(U\mathrm{e}^{i\omega t}j\right)$$

b) La partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles : $u_1 + u_2 + u_3 = \mathrm{Re}\left(U\mathrm{e}^{i\omega t}(1 + j + j^2)\right)$. Or j est racine de $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$ et $j \neq 1$, donc $1 + j + j^2 = 0$: la somme est nulle à chaque instant. **Contrôle** en $\omega t = 0$: $U - \dfrac{U}{2} - \dfrac{U}{2} = 0$.

c) Dans une installation équilibrée, les trois courants s'annulent de même à chaque instant : le conducteur de neutre ne transporte aucun courant, ce qui permet d'en réduire la section ou de s'en passer sur les lignes de transport. Si les phases sont déséquilibrées, la somme n'est plus nulle et le neutre redevient nécessaire.

Réponse. a) $u_1 = \mathrm{Re}\left(U\mathrm{e}^{i\omega t}\right)$, $u_2 = \mathrm{Re}\left(U\mathrm{e}^{i\omega t}j^2\right)$, $u_3 = \mathrm{Re}\left(U\mathrm{e}^{i\omega t}j\right)$ · b) la somme vaut $\mathrm{Re}\left(U\mathrm{e}^{i\omega t}\left(1 + j + j^2\right)\right) = 0$ · c) en régime équilibré, le neutre ne transporte aucun courant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).