

Plaquette 5 - Synthèse : sommes trigonométriques, spirales et applications

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Somme géométrique complexe. Pour θ non multiple de 2π :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

La seconde écriture s'obtient en factorisant l'angle moitié **en haut et en bas**. En prenant partie réelle et partie imaginaire :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

Moivre, dans l'autre sens. Développer $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ et identifier les parties réelle et imaginaire donne $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$:

$$\cos(4\theta) = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1 \quad \sin(4\theta) = 4 \sin \theta \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)$$

Inégalité triangulaire. Pour tous complexes :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

avec **égalité si et seulement si** z et z' ont le même argument (ou l'un est nul).

Suite géométrique de complexes. Si $z_{n+1} = q z_n$ avec $q = \rho e^{i\alpha}$, alors $z_n = q^n z_0$: le module est multiplié par ρ et l'argument augmenté de α à chaque étape. Selon ρ , les points parcourent un **cercle** ($\rho = 1$), une **spirale rentrante** ($\rho < 1$) ou **sortante** ($\rho > 1$).

Deux formules d'équations trigonométriques.

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \text{ ou } a = -b + 2k\pi$$

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \text{ ou } a = \pi - b + 2k\pi$$

Correction de l'exercice 1 - Somme de cosinus

- **Méthode** : on passe par le complexe, puis on prendra la partie réelle ✓
- **On pose** : $C = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$ ✓
- **Lien** : $\cos(k\theta) = \operatorname{Re}(e^{ik\theta})$, donc la somme cherchée est $\operatorname{Re}(C)$ ✓
- **Nature de C** : somme géométrique de raison $e^{i\theta}$, de premier terme 1, à $n+1$ termes ✓
- **Condition** : $e^{i\theta} \neq 1$, assurée par l'hypothèse sur θ ✓
- **Formule** :

$$C = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

- **Factorisation du numérateur par l'angle moitié** : $1 - e^{i\varphi} = -2i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}}$ ✓

- **Ici** : $\varphi = (n + 1)\theta$ ✓
- **Numérateur** : $-2i \sin\left(\frac{(n + 1)\theta}{2}\right) e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}$ ✓
- **Dénominateur** : $-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ ✓
- **Simplification du facteur $-2i$** : il disparaît ✓
- **Quotient des exponentielles** : $e^{i\left(\frac{(n+1)\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\frac{n\theta}{2}}$ ✓
- **Expression obtenue** :

$$C = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

- **Le facteur devant est un réel** : c'est un quotient de sinus de réels ✓
- **Partie réelle** : le réel sort, et $\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{n\theta}{2}}\right) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ ✓
- **Formule démontrée** ✓
- **Contrôle pour $n = 1$** : la formule donne $\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$ ✓
- **Or** : $\sin\theta = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}$ ✓
- **Simplification** : $2 \cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien $\cos 0 + \cos\theta$ ✓

Réponse. En factorisant l'angle moitié au numérateur et au dénominateur de $\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$, puis en prenant la partie réelle.

Correction de l'exercice 2 - Somme de sinus, et application numérique

- **a) Même point de départ** : $C = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{n\theta}{2}}$ ✓
- **On prend cette fois la partie imaginaire** ✓
- **Le facteur réel sort** ✓
- **Partie imaginaire de l'exponentielle** : $\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ ✓
- **Formule** :

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

- **b) Données** : $n = 5$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$ ✓
- **Premier facteur, numérateur** : $\frac{(n+1)\theta}{2} = \frac{6 \times \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{2}$ ✓
- **Valeur** : $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ✓
- **Dénominateur** : $\sin\frac{\pi}{12}$ ✓
- **Second facteur** : $\frac{n\theta}{2} = \frac{5\pi}{12}$ ✓
- **Valeur** : $\cos\frac{5\pi}{12}$ ✓

- **Observation décisive** : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \checkmark$
- **Donc** : $\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \checkmark$
- **Produit** : $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{12}} \times \sin \frac{\pi}{12} \checkmark$
- **Résultat** :

$$\sum_{k=0}^5 \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) = 1$$

- **Vérification terme à terme** : $\cos 0 = 1 \checkmark$
- **Suite** : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \checkmark$
- **Suite** : $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$
- **Somme** : les termes se compensent deux à deux, sauf le premier $\checkmark$
- **Cohérence** : le total vaut bien 1 $\checkmark$

Réponse. a) $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ · b) la somme vaut 1.

Correction de l'exercice 3 - $\cos(4\theta)$ par Moivre

- **Moivre** : $\cos(4\theta) + i \sin(4\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^4 \checkmark$
- **Notations** : on pose $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta \checkmark$
- **Binôme de Newton, coefficients** : 1, 4, 6, 4, 1 $\checkmark$
- **Développement** : $c^4 + 4c^3(is) + 6c^2(is)^2 + 4c(is)^3 + (is)^4 \checkmark$
- **Puissances de i** : $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1 \checkmark$
- **Terme 1** : $c^4 \checkmark$
- **Terme 2** : $4ic^3s$, imaginaire $\checkmark$
- **Terme 3** : $-6c^2s^2$, réel $\checkmark$
- **Terme 4** : $-4ics^3$, imaginaire $\checkmark$
- **Terme 5** : s^4 , réel $\checkmark$
- **Partie réelle** : $c^4 - 6c^2s^2 + s^4 \checkmark$
- **Identification** :

$$\cos(4\theta) = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta$$

- **On remplace** : $s^2 = 1 - c^2 \checkmark$
- **Troisième terme** : $s^4 = (1 - c^2)^2 = 1 - 2c^2 + c^4 \checkmark$
- **Deuxième terme** : $-6c^2(1 - c^2) = -6c^2 + 6c^4 \checkmark$
- **Somme** : $c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4 \checkmark$
- **Réduction** : $8c^4 - 8c^2 + 1 \checkmark$
- **Formule démontrée** $\checkmark$
- **Contrôle en $\theta = 0$** : $8 - 8 + 1 = 1 = \cos 0 \checkmark$
- **Contrôle en $\theta = \frac{\pi}{4}$** : $c^2 = \frac{1}{2}$, donc $8 \times \frac{1}{4} - 8 \times \frac{1}{2} + 1 = 2 - 4 + 1 = -1 \checkmark$
- **Cohérence** : $\cos \pi = -1 \checkmark$
- **Contrôle en $\theta = \frac{\pi}{3}$** : $c = \frac{1}{2}$, donc $8 \times \frac{1}{16} - 8 \times \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{2} \checkmark$

— **Cohérence** : $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ✓

Réponse. En identifiant les parties réelles de $(\cos \theta + i \sin \theta)^4$ et de $\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)$, puis en remplaçant $\sin^2 \theta$ par $1 - \cos^2 \theta$.

Correction de l'exercice 4 - $\sin(4\theta)$ et une factorisation

— **Partie imaginaire du développement précédent** : $4c^3s - 4cs^3$ ✓

— **Identification** :

$$\sin(4\theta) = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$$

— **Mise en facteur** : $4 \sin \theta \cos \theta$ est commun ✓

— **Expression** : $4 \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$ ✓

— **On remplace** : $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ ✓

— **Parenthèse** : $\cos^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ ✓

— **Formule démontrée** :

$$\sin(4\theta) = 4 \sin \theta \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)$$

— **Lecture** : on reconnaît $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$ et $2 \cos^2 \theta - 1 = \cos(2\theta)$ ✓

— **Donc** : $\sin(4\theta) = 2 \sin(2\theta) \cos(2\theta)$, ce qui est la formule de duplication ✓

— **Résolution** : le produit est nul si l'un des trois facteurs l'est ✓

— **Premier facteur** : $\sin \theta = 0$ ✓

— **Solutions dans $[0; \pi]$** : $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ ✓

— **Deuxième facteur** : $\cos \theta = 0$ ✓

— **Solution** : $\theta = \frac{\pi}{2}$ ✓

— **Troisième facteur** : $2 \cos^2 \theta = 1$, donc $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

— **Solutions** : $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ✓

— **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\langle 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$$

— **Contrôle direct** : $\sin(4\theta) = 0$ équivaut à $4\theta = k\pi$, donc $\theta = \frac{k\pi}{4}$ ✓

— **Cohérence** : on retrouve exactement les cinq valeurs ✓

Réponse. $\sin(4\theta) = 4 \sin \theta \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)$, et $S = \left\langle 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$.

Correction de l'exercice 5 - Une équation par égalité de cosinus

— **Formule du cours** : $\cos a = \cos b$ équivaut à $a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k\pi$ ✓

— **Premier cas** : $3x = x + 2k\pi$ ✓

— **Résolution** : $2x = 2k\pi$, donc $x = k\pi$ ✓

— **Valeurs dans $[0; 2\pi[$** : 0 et π ✓

— **Second cas** : $3x = -x + 2k\pi$ ✓

— **Résolution** : $4x = 2k\pi$, donc $x = \frac{k\pi}{2}$ ✓

— **Valeurs dans $[0; 2\pi[$** : $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ✓

— **Réunion des deux cas** : on ne compte qu'une fois les valeurs communes ✓

— **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\langle 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$$

- **Vérification pour** $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ✓
- **Vérification pour** $x = \pi$: $\cos(3\pi) = -1$ et $\cos \pi = -1$ ✓
- **Vérification pour** $x = \frac{3\pi}{2}$: $\cos \frac{9\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ✓
- **Méthode alternative** : utiliser $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ ✓
- **Équation** : $4\cos^3 x - 4\cos x = 0$ ✓
- **Factorisation** : $4\cos x(\cos^2 x - 1) = 0$ ✓
- **Donc** : $\cos x = 0$, $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$ ✓
- **Cohérence** : on retrouve les quatre mêmes solutions ✓
- **Piège classique** : oublier le second cas $a = -b + 2k\pi$, ce qui ferait perdre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ ✓

Réponse. $S = \left\langle 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 6 - Inégalité triangulaire et cas d'égalité

- **a) Point de départ** : on compare les **carrés**, tous deux positifs ✓
- **Développement** : $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \quad \checkmark$
- **Majoration de la partie réelle** : pour tout complexe Z , $\operatorname{Re}(Z) \leq |Z| \quad \checkmark$
- **Justification** : si $Z = x + iy$, alors $x \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \checkmark$
- **Application** : $\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'| = |z||z'| \quad \checkmark$
- **Majoration** : $|z + z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| \quad \checkmark$
- **Identité remarquable** : le membre de droite vaut $(|z| + |z'|)^2 \quad \checkmark$
- **Racine carrée** : la fonction racine est croissante sur $[0; +\infty[\quad \checkmark$
- **Inégalité obtenue** :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$
- **b) Égalité** : elle exige $\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |z\bar{z}'| \quad \checkmark$
- **Condition** : le complexe $z\bar{z}'$ doit être un **réel positif** ✓
- **Traduction sur les arguments** : $\arg z - \arg z' = 0$ modulo $2\pi \quad \checkmark$
- **Conclusion** : égalité si et seulement si z et z' ont le **même argument**, ou si l'un est nul ✓
- **Interprétation géométrique** : les vecteurs sont de même sens, on parcourt un chemin droit ✓
- **Illustration** : z et z' ont tous deux pour argument $\frac{\pi}{4} \quad \checkmark$
- **Somme** : $z + z' = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \checkmark$
- **Module de la somme** : $8 \quad \checkmark$
- **Somme des modules** : $3 + 5 = 8 \quad \checkmark$
- **Cohérence** : il y a bien égalité ✓
- **Contre-exemple** : pour $z = 3$ et $z' = 5i$, $|z + z'| = \sqrt{34} \approx 5,83 \quad \checkmark$
- **Comparaison** : $3 + 5 = 8 > 5,83$, l'inégalité est stricte ✓

Réponse. a) en développant $|z + z'|^2$ et en majorant $\operatorname{Re}(z\bar{z}')$ par $|z||z'|$ · b) égalité si et seulement si z et z' ont le même argument (ou l'un est nul).

Correction de l'exercice 7 - Des points qui tournent

— **a) Nature** : suite géométrique de raison $q = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ✓

— **Formule** : $z_n = z_0 q^n$ ✓

— **Expression** :

$$z_n = 2 e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

— **Module** : $|z_n| = 2$ pour tout n ✓

— **Conséquence** : tous les points sont sur le cercle de centre O et de rayon 2 ✓

— **Terme z_3** : argument $\frac{3\pi}{4}$ ✓

— **Valeurs** : $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

— **Forme algébrique** :

$$z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

— **b) Périodicité** : on cherche le plus petit p tel que $q^p = 1$ ✓

— **Condition** : $\frac{p\pi}{4} = 2k\pi$, donc $p = 8k$ ✓

— **Plus petit entier positif** : $p = 8$ ✓

— **Conclusion** : $z_{n+8} = z_n$ pour tout n , la suite est périodique de période 8 ✓

— **Vérification** : $q^8 = e^{i2\pi} = 1$ ✓

— **c) Longueur d'un segment** : $M_n M_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$ ✓

— **Factorisation** : $z_{n+1} - z_n = z_n(q - 1)$ ✓

— **Module** : $|z_n| \times |q - 1| = 2 \times \left| e^{i\frac{\pi}{4}} - 1 \right|$ ✓

— **Formule de l'angle moitié** : $|1 - e^{i\theta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$ ✓

— **Ici** : $2 \sin \frac{\pi}{8}$ ✓

— **Longueur d'un côté** : $4 \sin \frac{\pi}{8} \approx 1,531$ ✓

— **Constatation** : elle ne dépend pas de n ✓

— **Longueur totale, huit segments** :

$$L = 32 \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \approx 12,246$$

— **Périmètre du cercle** : $2\pi \times 2 = 4\pi \approx 12,566$ ✓

— **Comparaison** : $L < 4\pi$, l'octogone est inscrit dans le cercle ✓

— **Écart relatif** : environ 2,5 % ✓

Réponse. a) $z_n = 2 e^{i\frac{n\pi}{4}}$ et $z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ · b) période 8 · c) $L = 32 \sin \frac{\pi}{8} \approx 12,246$, contre $4\pi \approx 12,566$ pour le cercle.

Correction de l'exercice 8 - Une spirale sortante

— **a) Raison** : $q = 1 + i$ ✓

— **Module de la raison** : $|1 + i| = \sqrt{2}$ ✓

— **Argument de la raison** : $\frac{\pi}{4}$ ✓

— **Forme explicite** : $w_n = (1 + i)^n$ ✓

— **Module** :

$$|w_n| = (\sqrt{2})^n = 2^{\frac{n}{2}}$$

— **Argument :**

$$\arg(w_n) = \frac{n\pi}{4} \quad [2\pi]$$

- **Interprétation :** à chaque étape, le point tourne de 45° et son rayon est multiplié par $\sqrt{2} \approx 1,414$ ✓
- **Nom de la courbe :** les points suivent une **spirale logarithmique** ✓
- **b) Inéquation :** $2^{\frac{n}{2}} > 1\,000$ ✓
- **Passage au logarithme en base 2 :** $\frac{n}{2} > \log_2(1\,000)$ ✓
- **Valeur :** $\log_2(1\,000) \approx 9,966$ ✓
- **Donc :** $n > 19,93$ ✓
- **Plus petit entier :** $n = 20$ ✓
- **Vérification :** $|w_{20}| = 2^{10} = 1\,024 > 1\,000$ ✓
- **Vérification du précédent :** $|w_{19}| = 2^{9,5} \approx 724 < 1\,000$ ✓
- **c) Condition :** l'argument doit être nul ou égal à π modulo 2π ✓
- **Écriture unique :** $\frac{n\pi}{4} = k\pi$ pour un entier k ✓
- **Donc :** $n = 4k$ ✓
- **Conclusion :** le point est sur l'axe des réels si et seulement si n est un **multiple de 4** ✓
- **Contrôle :** $(1+i)^4 = -4$, qui est bien réel ✓
- **Contrôle :** $(1+i)^8 = 16$, réel également ✓
- **Remarque :** pour n multiple de 8 le réel est **positif**, pour $n \equiv 4$ modulo 8 il est négatif ✓

Réponse. a) $|w_n| = 2^{\frac{n}{2}}$ et $\arg w_n = \frac{n\pi}{4}$ · b) $n = 20$ (avec $|w_{20}| = 1\,024$) · c) lorsque n est un multiple de 4.

Correction de l'exercice 9 - Une équation de degré apparent 5

- **Attention au degré :** en développant, les termes en z^5 se **simplifient** ✓
- **Conséquence :** l'équation n'est pas de degré 5 mais de degré 4 ✓
- **Remarque préalable :** $z = 1$ n'est pas solution, car $2^5 \neq 0$ ✓
- **On peut donc diviser :** $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1$ ✓
- **On pose :** $\omega = \frac{z+1}{z-1}$ ✓
- **Équation :** $\omega^5 = 1$, donc $\omega = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ pour k de 0 à 4 ✓
- **Cas $k = 0$:** $\omega = 1$ donnerait $z+1 = z-1$, impossible ✓
- **Il reste donc quatre valeurs :** k de 1 à 4 ✓
- **On revient à z :** $z+1 = \omega(z-1)$ ✓
- **Regroupement :** $z(1-\omega) = -1-\omega$ ✓
- **Expression :**

$$z = \frac{1+\omega}{\omega-1}$$

- **On pose :** $\omega = e^{i\alpha}$ avec $\alpha = \frac{2k\pi}{5}$ ✓
- **Numérateur, angle moitié :** $1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ ✓
- **Dénominateur :** $e^{i\alpha} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ ✓

— **Quotient** : les exponentielles se simplifient ✓

— **Expression** : $\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ ✓

— **On multiplie par** $\frac{-i}{-i} : \frac{1}{i} = -i$ ✓

— **Solutions** :

$$z_k = -i \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} \quad k \in \{1; 2; 3; 4\}$$

— **Remarque** : les quatre solutions sont des **imaginaires purs** ✓

— **Valeurs approchées** : $-1,376i, -0,325i, 0,325i, 1,376i$ ✓

— **Vérification de la plus simple**, $k = 2 : z \approx -0,325i$ ✓

— **Interprétation** : $|z + 1| = |z - 1|$ pour tout imaginaire pur, ce qui est cohérent avec l'égalité des modules ✓

— **Justification géométrique** : les solutions sont sur la **médiatrice** de $[-1; 1]$, c'est-à-dire l'axe des imaginaires purs ✓

Réponse. Quatre solutions, toutes imaginaires pures : $z_k = -i \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}$ pour $k = 1, 2, 3, 4$, soit environ $\pm 1,376i$ et $\pm 0,325i$.

Correction de l'exercice 10 - Puissances réelles sur le cercle unité

— **Mise en place** : $|z| = 1$, donc $z = e^{i\theta}$ ✓

— **Puissance** : $z^6 = e^{6i\theta}$ ✓

— **Condition « réel »** : l'argument vaut 0 ou π modulo 2π ✓

— **Écriture unifiée** : $6\theta = k\pi$ pour un entier k ✓

— **Donc** :

$$\theta = \frac{k\pi}{6}$$

— **Valeurs distinctes modulo 2π** : k de 0 à 11 ✓

— **Nombre de solutions** : **douze** ✓

— **Disposition** : douze points régulièrement répartis sur le cercle unité ✓

— **Figure** : ils forment un **dodécagone régulier** ✓

— **Écart angulaire** : $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ ✓

— **Les six premiers** : $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ ✓

— **Tri des résultats** : pour k pair, 6θ est multiple de 2π ✓

— **Conséquence** : $z^6 = 1$, ce sont les six racines sixièmes de l'unité ✓

— **Pour k impair** : 6θ vaut π modulo 2π ✓

— **Conséquence** : $z^6 = -1$ ✓

— **Vérification**, $k = 1$: $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z^6 = e^{i\pi} = -1$ ✓

— **Vérification**, $k = 2$: $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z^6 = e^{i2\pi} = 1$ ✓

— **Résumé** : les douze solutions sont les six racines de $z^6 = 1$ et les six racines de $z^6 = -1$ ✓

— **Cohérence** : ce sont exactement les racines de $z^{12} = 1$ ✓

Réponse. Les douze complexes $e^{i\frac{k\pi}{6}}$ pour k de 0 à 11 : ce sont les racines douzièmes de

l'unité, sommets d'un dodécagone régulier.

Correction de l'exercice 11 - Produit des distances dans un polygone régulier

- **Notations** : $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $\omega_0 = 1$ ✓
- **Traduction** : $A_0A_k = |1 - \omega_k|$ ✓
- **Produit cherché** : $P = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - \omega_k|$ ✓
- **Le module d'un produit est le produit des modules** ✓
- **Donc** : $P = \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) \right|$ ✓
- **Outil** : la factorisation $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k)$ ✓
- **On isole le facteur $k = 0$** : $z^n - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k)$ ✓
- **On divise par $z - 1$, pour $z \neq 1$** :

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$$

- **Justification** : c'est la somme géométrique, valable pour $z \neq 1$ ✓
- **Le membre de gauche est un polynôme** : l'égalité s'étend par continuité à $z = 1$ ✓
- **On évalue en $z = 1$** : le membre de droite devient $1 + 1 + \dots + 1$ ✓
- **Nombre de termes** : n ✓
- **Donc** :

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = n$$

- **Module** : n est un réel positif, son module vaut n ✓
- **Conclusion** : $P = n$ ✓
- **Contrôle pour $n = 4$** : les sommets sont $1, i, -1, -i$ ✓
- **Distances** : $|1 - i| = \sqrt{2}$, $|1 + 1| = 2$, $|1 + i| = \sqrt{2}$ ✓
- **Produit** : $\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$ ✓
- **Cohérence** : le produit vaut bien $n = 4$ ✓
- **Contrôle pour $n = 3$** : trois sommets, deux distances égales à $\sqrt{3}$ ✓
- **Produit** : $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ ✓

Réponse. En évaluant $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k) = 1 + z + \dots + z^{n-1}$ en $z = 1$: le produit vaut n .

Correction de l'exercice 12 - Interférences de deux sources

- **a) Outil** : la factorisation par l'angle moitié ✓
- **Formule** : $1 + e^{i\varphi} = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}}$ ✓
- **Amplitude complexe** : $A = 2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}}$ ✓
- **Module** : $|A| = 2a \left| \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right|$ ✓
- **Le module de l'exponentielle vaut 1** ✓
- **Carré** :

$$|A|^2 = 4a^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

- **Remarque** : la valeur absolue disparaît au carré ✓
- **b) Maximum** : atteint quand $\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1$ ✓
- **Condition** : $\frac{\varphi}{2} = k\pi$, donc $\varphi = 2k\pi$ ✓
- **Vocabulaire** : les ondes sont **en phase**, l'interférence est **constructive** ✓
- **Intensité nulle** : $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$ ✓
- **Condition** : $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc $\varphi = \pi + 2k\pi$ ✓
- **Vocabulaire** : ondes **en opposition de phase**, interférence **destructive** ✓
- **Vérification directe** : pour $\varphi = \pi$, $1 + e^{i\pi} = 1 - 1 = 0$ ✓
- **c) Intensité maximale** : $|A|^2 = 4a^2$ ✓
- **Intensité d'une source seule** : son amplitude est a , donc son intensité a^2 ✓
- **Rapport** :

$$\frac{4a^2}{a^2} = 4$$

- **Conclusion** : l'intensité maximale vaut **quatre fois** celle d'une source seule ✓
- **Remarque physique** : et non deux fois, comme le suggérerait une addition naïve des intensités ✓
- **Explication** : ce sont les **amplitudes** qui s'additionnent, et l'intensité varie comme leur carré ✓
- **Conservation de l'énergie** : la moyenne de $\cos^2$ vaut $\frac{1}{2}$, donc l'intensité moyenne vaut $2a^2$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien la somme des intensités des deux sources ✓

Réponse. a) $|A|^2 = 4a^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ · b) maximale pour $\varphi = 2k\pi$, nulle pour $\varphi = \pi + 2k\pi$ · c) quatre fois l'intensité d'une source seule.

Correction de l'exercice 13 - Un réseau de N antennes

- **a) Nature de la somme** : géométrique, de raison $e^{i\varphi}$, à N termes ✓
- **Formule** : $\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\varphi} = \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$ ✓
- **Module du numérateur** : $|1 - e^{iN\varphi}| = 2 \left| \sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) \right|$ ✓
- **Module du dénominateur** : $2 \left| \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right|$ ✓
- **Le facteur 2 se simplifie** ✓
- **Résultat** :

$$|A| = a \frac{\left| \sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) \right|}{\left| \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right|}$$

- **Nom de cette fonction** : c'est le **facteur de réseau**, central en antennes et en optique ✓
- **b) Cas $\varphi = 2k\pi$** : toutes les exponentielles valent 1 ✓
- **Somme** : N termes égaux à 1 ✓
- **Amplitude** :

$$|A| = aN$$

- **Commentaire** : c'est le **maximum principal**, toutes les antennes émettent en phase ✓
- **Intensité correspondante** : proportionnelle à $a^2 N^2$ ✓
- **Remarque** : l'énergie n'est pas créée, elle est **concentrée** dans une direction ✓
- **Cohérence avec la formule du a)** : le quotient tend vers N quand $\varphi \rightarrow 0$ ✓
- **Justification** : $\sin u \sim u$, donc le quotient tend vers $\frac{N\varphi/2}{\varphi/2} = N$ ✓
- **c) Amplitude nulle** : il faut $\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0$ **et** $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0$ ✓
- **Première condition** : $\frac{8\varphi}{2} = m\pi$, donc $\varphi = \frac{m\pi}{4}$ ✓
- **Valeurs dans** $]0; 2\pi[$: m de 1 à 7 ✓
- **Liste** : $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$ ✓
- **Seconde condition** : $\frac{\varphi}{2}$ n'est pas multiple de π , ce qui est vrai pour tous ✓
- **Conclusion** : **sept** directions d'extinction ✓
- **Règle générale** : un réseau de N antennes présente $N - 1$ zéros entre deux maxima principaux ✓

Réponse. a) par le module de $\frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$ · b) $|A| = aN$, maximum principal · c) les sept valeurs $\varphi = \frac{m\pi}{4}$, m de 1 à 7.

Correction de l'exercice 14 - Modulation d'amplitude

- **a) Développement** : $s(t) = \cos(2\pi f_p t) + m \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_p t)$ ✓
- **Outil pour le second terme** : $\cos a \cos b = \frac{\cos(a - b) + \cos(a + b)}{2}$ ✓
- **Ici** : $a = 2\pi f_m t$ et $b = 2\pi f_p t$ ✓
- **Différence** : $2\pi(f_m - f_p)t$ ✓
- **Parité** : $\cos$ est paire, on écrit $2\pi(f_p - f_m)t$ ✓
- **Somme** : $2\pi(f_p + f_m)t$ ✓
- **Décomposition obtenue** :

$$s(t) = \cos(2\pi f_p t) + \frac{m}{2} \cos(2\pi(f_p - f_m)t) + \frac{m}{2} \cos(2\pi(f_p + f_m)t)$$

- **Lecture** : la porteuse, d'amplitude 1, à la fréquence f_p ✓
- **Les deux autres** : les **bandes latérales**, d'amplitude $\frac{m}{2}$ chacune ✓
- **Fréquences** : $f_p - f_m$ et $f_p + f_m$ ✓
- **b) Application numérique** : porteuse à 1 000 kHz ✓
- **Bande latérale inférieure** : $1\,000 - 5 = 995$ kHz ✓
- **Bande latérale supérieure** : $1\,000 + 5 = 1\,005$ kHz ✓
- **Amplitudes des bandes latérales** : $\frac{0,5}{2} = 0,25$ ✓
- **Largeur de bande** : de 995 à 1 005 kHz ✓
- **Résultat** :

$$B = 2f_m = 10 \text{ kHz}$$

- **Règle à retenir** : la largeur de bande vaut **deux fois** la fréquence maximale du signal modulant ✓

- **c) Intervalle disponible** : $1\,100 - 1\,000 = 100$ kHz ✓
- **Largeur par station** : 10 kHz ✓
- **Nombre de stations** : $\frac{100}{10}$ ✓
- **Résultat** : 10 stations ✓
- **Cohérence avec la réalité** : la bande AM européenne utilise un pas de 9 kHz entre porteuses ✓
- **Commentaire** : c'est exactement ce calcul qui fixe le plan de fréquences ✓

Réponse. a) porteuse à f_p d'amplitude 1, et deux bandes latérales à $f_p \pm f_m$ d'amplitude $\frac{m}{2}$ · b) 995, 1 000 et 1 005 kHz, largeur de bande 10 kHz · c) 10 stations.

Correction de l'exercice 15 - Bilan : un même complexe sous tous les angles

- **a) Numérateur, base** : $|1 + i\sqrt{3}| = 2$ et son argument vaut $\frac{\pi}{3}$ ✓
- **Moivre** : module $2^7 = 128$, argument $\frac{7\pi}{3}$ ✓
- **Réduction** : $\frac{7\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3}$ ✓
- **Numérateur** : $128 e^{i\frac{\pi}{3}}$ ✓
- **Dénominateur, base** : $|1 - i| = \sqrt{2}$ et son argument vaut $-\frac{\pi}{4}$ ✓
- **Moivre** : module $(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$, argument $-\frac{5\pi}{4}$ ✓
- **Dénominateur** : $4\sqrt{2} e^{-i\frac{5\pi}{4}}$ ✓
- **Module du quotient** : $\frac{128}{4\sqrt{2}} = \frac{32}{\sqrt{2}}$ ✓
- **Rationalisation** : $16\sqrt{2}$ ✓
- **Argument du quotient** : $\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}$ ✓
- **Au même dénominateur** : $\frac{4\pi}{12} + \frac{15\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}$ ✓
- **Réduction** : $\frac{19\pi}{12} - 2\pi = -\frac{5\pi}{12}$ ✓
- **Forme exponentielle** :

$$Z = 16\sqrt{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}}$$

- **b) Valeurs de l'angle** : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ ✓
- **Cosinus** : $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ✓
- **Sinus** : $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ✓
- **Partie réelle** : $16\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ✓
- **Développement** : $4\sqrt{12} - 4 \times 2 = 8\sqrt{3} - 8$ ✓
- **Partie imaginaire** : $-16\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = -(8\sqrt{3} + 8)$ ✓
- **Forme algébrique** :

$$Z = 8(\sqrt{3} - 1) - 8(\sqrt{3} + 1)i$$

- **Contrôle du module** : $64 \left[(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 \right] = 64 \times 8 = 512$ ✓
- **Racine** : $\sqrt{512} = 16\sqrt{2}$ ✓

- **Cohérence** : conforme au a) ✓
- **c) Condition** : $\arg(Z^n) = 0 \text{ modulo } 2\pi$ ✓
- **Équation** : $-\frac{5n\pi}{12} = 2k\pi$, donc $5n = -24k$ ✓
- **Donc n est multiple de 24**, car 5 et 24 sont premiers entre eux ✓
- **Plus petit entier positif** : $n = 24$ ✓
- **Vérification** : $\arg(Z^{24}) = -10\pi \equiv 0$ ✓
- **Contrôle intermédiaire** : pour $n = 12$, l'argument vaut $-5\pi \equiv \pi$, donc Z^{12} est réel négatif ✓

Réponse. a) $Z = 16\sqrt{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ · b) $Z = 8(\sqrt{3} - 1) - 8(\sqrt{3} + 1)i$ · c) $n = 24$.