Plaquette 5 – Synthèse : sommes trigonométriques, spirales et applications

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Somme géométrique complexe. Pour θ non multiple de 2π :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}}$$

La seconde écriture s'obtient en factorisant l'angle moitié **en haut et en bas**. En prenant partie réelle et partie imaginaire :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

Moivre, dans l'autre sens. Développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ et identifier les parties réelle et imaginaire donne $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \qquad \sin(4\theta) = 4\sin\theta\cos\theta\left(2\cos^2\theta - 1\right)$$

Inégalité triangulaire. Pour tous complexes :

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$

avec **égalité si et seulement si** z et z' ont le même argument (ou l'un est nul).

Suite géométrique de complexes. Si $z_{n+1} = q\,z_n$ avec $q = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}$, alors $z_n = q^n z_0$: le module est multiplié par ρ et l'argument augmenté de α à chaque étape. Selon ρ, les points parcourent un **cercle** ($\rho = 1$), une **spirale rentrante** ($\rho < 1$) ou **sortante** ($\rho > 1$).

Deux formules d'équations trigonométriques.

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi$$

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi$$

Correction de l'exercice 1 – Somme de cosinus

On passe par les complexes : $\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ik\theta}\right)$, donc la somme cherchée est la partie réelle de $C = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$. C'est une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$, à $n+1$ termes :

$$C = \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}}$$

en factorisant numérateur et dénominateur par l'angle moitié. Le quotient de sinus est réel : la partie réelle de C est ce quotient multiplié par $\cos\dfrac{n\theta}{2}$, ce qui donne la formule.

Contrôle pour $n = 1$: $\dfrac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\dfrac{\theta}{2} = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. En factorisant l'angle moitié au numérateur et au dénominateur de $\dfrac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}$, puis en prenant la partie réelle.

Correction de l'exercice 2 – Somme de sinus, et application numérique

a) Avec la même expression de C, on prend cette fois la partie imaginaire ; le quotient de sinus étant réel, il reste $\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}}\right) = \sin\dfrac{n\theta}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

b) Pour $n=5$ et $\theta=\dfrac{\pi}{6}$: $\dfrac{(n+1)\theta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{n\theta}{2}=\dfrac{5\pi}{12}$. La formule donne $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{12}}\cos\dfrac{5\pi}{12}=1$, car $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{12}$. **Vérification** terme à terme : $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}+0-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$.

Réponse. a) $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)$ · b) la somme vaut 1.

Correction de l'exercice 3 – cos(4θ) par Moivre

D'après la formule de Moivre, $\cos(4\theta)+i\sin(4\theta)=(c+is)^4$ avec $c=\cos\theta$ et $s=\sin\theta$. On développe avec les coefficients 1, 4, 6, 4, 1 et $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$; les termes réels sont c^4, $-6c^2s^2$ et s^4, d'où

$$\cos(4\theta)=c^4-6c^2s^2+s^4$$

En remplaçant s^2 par $1-c^2$:
$c^4-6c^2(1-c^2)+(1-c^2)^2=c^4-6c^2+6c^4+1-2c^2+c^4=8c^4-8c^2+1$. **Contrôle** en $\theta=\dfrac{\pi}{3}$: $8\times\dfrac{1}{16}-8\times\dfrac{1}{4}+1=-\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{4\pi}{3}$.

Réponse. En identifiant les parties réelles de $(\cos\theta+i\sin\theta)^4$ et de $\cos(4\theta)+i\sin(4\theta)$, puis en remplaçant $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$.

Correction de l'exercice 4 – sin(4θ) et une factorisation

Les termes imaginaires du même développement donnent
$\sin(4\theta)=4c^3s-4cs^3=4sc\left(c^2-s^2\right)$, et avec $s^2=1-c^2$:

$$\sin(4\theta)=4\sin\theta\cos\theta\left(2\cos^2\theta-1\right)$$

On reconnaît $2\sin(2\theta)\cos(2\theta)$. Un produit est nul si l'un des facteurs l'est : $\sin\theta=0$ donne 0 et π ; $\cos\theta=0$ donne $\dfrac{\pi}{2}$; $\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donne $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$. **Contrôle** : $\sin(4\theta)=0$ équivaut directement à $\theta=\dfrac{k\pi}{4}$, ce qui redonne ces cinq valeurs dans $[0\,;\pi]$.

Réponse. $\sin(4\theta)=4\sin\theta\cos\theta\left(2\cos^2\theta-1\right)$, et $S=\left\langle 0\,;\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{4}\,;\pi\right\rangle$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Une équation par égalité de cosinus

L’égalité $\cos a = \cos b$ équivaut à $a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k\pi$. Le premier cas, $3x = x + 2k\pi$, donne $x = k\pi$; le second, $3x = -x + 2k\pi$, donne $x = \dfrac{k\pi}{2}$. Dans $[0\,;2\pi[$, en ne comptant qu’une fois les valeurs communes :

$$S = \left\{0\,;\frac{\pi}{2}\,;\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right\}$$

Contrôle par une autre méthode : avec $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$, l’équation devient $4\cos x(\cos^2 x - 1) = 0$, donc $\cos x \in \{0\,;1\,;-1\}$, ce qui redonne les mêmes valeurs. Oublier le second cas ferait perdre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Réponse. $S = \left\{0\,;\frac{\pi}{2}\,;\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Correction de l’exercice 6 – Inégalité triangulaire et cas d’égalité

a) Les deux membres étant positifs, on compare leurs carrés. On a $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$, et la partie réelle d’un complexe ne dépasse pas son module ($x \le \sqrt{x^2+y^2}$) :

$$|z+z'|^2 \le |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'| = (|z| + |z'|)^2$$

La fonction racine carrée étant croissante, $|z+z'| \le |z| + |z'|$.

b) Il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = |z\overline{z'}|$, c’est-à-dire si $z\overline{z'}$ est un réel positif : z et z' ont le même argument, ou l’un d’eux est nul. Avec $z = 3\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z' = 5\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, $z+z' = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ a bien pour module $3+5$. En revanche, $|3+5i| = \sqrt{34} < 8$.

Réponse. a) en développant $|z+z'|^2$ et en majorant $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$ par $|z||z'|$ · b) égalité si et seulement si z et z' ont le même argument (ou l’un est nul).

Correction de l’exercice 7 – Des points qui tournent

a) La suite est géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $z_n = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{4}}$: tous les points sont sur le cercle de centre O et de rayon 2, et chacun se déduit du précédent par une rotation de $\frac{\pi}{4}$. En particulier $z_3 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

b) $z_{n+p} = z_n$ pour tout n équivaut à $\mathrm{e}^{i\frac{p\pi}{4}} = 1$, soit p multiple de 8 : la suite est périodique de période 8.

c) $M_nM_{n+1} = |z_n|\left|\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right| = 2 \times 2\sin\frac{\pi}{8}$ ne dépend pas de n ; la ligne brisée, formée de 8 segments, mesure

$$L = 32\sin\frac{\pi}{8} \approx 12{,}246$$

C’est le périmètre d’un octogone régulier inscrit, un peu moins que celui du cercle, $4\pi \approx 12{,}566$ (environ 2,5 % d’écart).

Réponse. a) $z_n = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{4}}$ et $z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ · b) période 8 · c) $L = 32\sin\frac{\pi}{8} \approx 12{,}246$, contre $4\pi \approx 12{,}566$ pour le cercle.

Correction de l’exercice 8 – Une spirale sortante

a) $w_n = (1+i)^n$ et $1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$|w_n| = \left(\sqrt{2}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}} \qquad \arg(w_n) = \frac{n\pi}{4} \quad [2\pi]$$

À chaque étape, le point tourne de $\frac{\pi}{4}$ et s'éloigne de O d'un facteur $\sqrt{2}$: il décrit une spirale.

b) $2^{\frac{n}{2}} > 1\,000$ équivaut, la fonction ln étant croissante, à $\frac{n}{2}\ln 2 > \ln 1\,000$, soit $n > \frac{2\ln 1\,000}{\ln 2} \approx 19{,}93$. Le plus petit entier est $n = 20$: $|w_{20}| = 2^{10} = 1\,024$, alors que $|w_{19}| = 2^{9{,}5} \approx 724$.

c) Le point est sur l'axe des réels quand son argument vaut 0 ou π modulo 2π, c'est-à-dire $\frac{n\pi}{4} = k\pi$: n doit être un multiple de 4. **Contrôle** : $(1+i)^4 = -4$ et $(1+i)^8 = 16$.

Réponse. a) $|w_n| = 2^{\frac{n}{2}}$ et $\arg w_n = \frac{n\pi}{4}$ · b) $n = 20$ (avec $|w_{20}| = 1\,024$) · c) lorsque n est un multiple de 4.

Correction de l'exercice 9 – Une équation de degré apparent 5

En développant, les termes en z^5 s'éliminent : l'équation est en réalité de degré 4. Comme $z = 1$ n'est pas solution, on peut diviser par $(z-1)^5$: $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1$, donc $\omega = \frac{z+1}{z-1}$ est une racine cinquième de l'unité, $\omega = \mathrm{e}^{i\alpha}$ avec $\alpha = \frac{2k\pi}{5}$. La valeur $\omega = 1$ est impossible ($z+1 = z-1$), il reste $k = 1, 2, 3, 4$. On exprime z et l'on factorise par l'angle moitié :

$$z = \frac{1+\omega}{\omega - 1} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\alpha}{2}}}{2i\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\alpha}{2}}} = -i\,\frac{\cos\frac{k\pi}{5}}{\sin\frac{k\pi}{5}}$$

Les quatre solutions sont imaginaires pures, environ $\pm 1{,}376i$ et $\pm 0{,}325i$. **Contrôle** géométrique : l'égalité des modules $|z+1| = |z-1|$ impose que z soit sur la médiatrice de $[-1\,;1]$, c'est-à-dire l'axe des imaginaires purs.

Réponse. Quatre solutions, toutes imaginaires pures : $z_k = -i\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}$ pour $k = 1, 2, 3, 4$, soit environ $\pm 1{,}376i$ et $\pm 0{,}325i$.

Correction de l'exercice 10 – Puissances réelles sur le cercle unité

Un complexe de module 1 s'écrit $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, et $z^6 = \mathrm{e}^{6i\theta}$ est réel quand son argument vaut 0 ou π modulo 2π, c'est-à-dire

$$6\theta = k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{6}$$

Les valeurs $k = 0$ à 11 donnent douze points distincts, régulièrement espacés de 30° sur le cercle unité : un dodécagone régulier. Pour k pair, $z^6 = 1$ (les racines sixièmes de l'unité) ; pour k impair, $z^6 = -1$. **Contrôle** : $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ a pour puissance sixième $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$. Ce sont exactement les racines douzièmes de l'unité, puisque $z^6 = \pm 1$ équivaut à $z^{12} = 1$.

Réponse. Les douze complexes $\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{6}}$ pour k de 0 à 11 : ce sont les racines douzièmes de l'unité, sommets d'un dodécagone régulier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Produit des distances dans un polygone régulier

$A_0A_k = |1-\omega_k|$ et le module d'un produit est le produit des modules, donc le produit cherché est $\left|\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega_k)\right|$. Or $z^n-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)$, et pour $z\neq 1$, la somme géométrique donne

$$\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)=\frac{z^n-1}{z-1}=1+z+\cdots+z^{n-1}$$

Les deux membres sont des polynômes égaux en une infinité de points, donc égaux partout ; en $z=1$, on obtient $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega_k)=n$, d'où le résultat. **Contrôle** pour $n=4$: $|1-i|\times|1+1|\times|1+i|=\sqrt{2}\times 2\times\sqrt{2}=4$.

Réponse. En évaluant $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)=1+z+\cdots+z^{n-1}$ en $z=1$: le produit vaut n.

Correction de l'exercice 12 – Interférences de deux sources

a) Par la factorisation par l'angle moitié, $A=2a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}}$, et comme $\left|e^{i\frac{\varphi}{2}}\right|=1$,

$$|A|^2=4a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

b) L'intensité est maximale quand $\cos^2\frac{\varphi}{2}=1$, soit $\varphi=2k\pi$: les ondes sont en phase (interférence constructive). Elle est nulle quand $\cos\frac{\varphi}{2}=0$, soit $\varphi=\pi+2k\pi$: les ondes sont en opposition de phase ; en effet $1+e^{i\pi}=0$.

c) Le maximum vaut $4a^2$, contre a^2 pour une source seule : quatre fois plus, et non deux, car ce sont les amplitudes qui s'ajoutent. **Contrôle** : en moyenne, $\cos^2$ vaut $\frac{1}{2}$, et l'intensité moyenne $2a^2$ est bien la somme des intensités des deux sources.

Réponse. a) $|A|^2=4a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ · b) maximale pour $\varphi=2k\pi$, nulle pour $\varphi=\pi+2k\pi$ · c) quatre fois l'intensité d'une source seule.

Correction de l'exercice 13 – Un réseau de N antennes

a) La somme est géométrique de raison $e^{i\varphi}\neq 1$, à N termes : $\sum_{k=0}^{N-1}e^{ik\varphi}=\frac{1-e^{iN\varphi}}{1-e^{i\varphi}}$. Avec $|1-e^{ix}|=2\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ au numérateur et au dénominateur,

$$|A|=a\,\frac{\left|\sin\frac{N\varphi}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|}$$

b) Si φ est un multiple de 2π, tous les termes valent 1 et $|A|=aN$: c'est le maximum principal, toutes les antennes émettent en phase et l'énergie se concentre dans cette direction. La formule du a) tend d'ailleurs vers N quand $\varphi\to 0$.

c) L'amplitude est nulle quand $\sin(4\varphi)=0$ sans que $\sin\frac{\varphi}{2}$ le soit : $\varphi=\frac{m\pi}{4}$ pour m de 1 à 7. Il y a sept zéros, soit $N-1$, entre deux maxima principaux.

Réponse. a) par le module de $\frac{1-e^{iN\varphi}}{1-e^{i\varphi}}$ · b) $|A|=aN$, maximum principal · c) les sept valeurs $\varphi=\frac{m\pi}{4}$, m de 1 à 7.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Modulation d’amplitude

a) On développe, puis on transforme le produit de cosinus en somme avec $\cos a \cos b = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$:

$$s(t) = \cos(2\pi f_{\mathrm{p}} t) + \frac{m}{2}\cos\big(2\pi(f_{\mathrm{p}}-f_{\mathrm{m}})t\big) + \frac{m}{2}\cos\big(2\pi(f_{\mathrm{p}}+f_{\mathrm{m}})t\big)$$

(le cosinus étant pair, on peut écrire $f_{\mathrm{p}} - f_{\mathrm{m}}$ plutôt que $f_{\mathrm{m}} - f_{\mathrm{p}}$). Le signal est la somme de la porteuse, d’amplitude 1 et de fréquence f_{p}, et de deux bandes latérales d’amplitude $\dfrac{m}{2}$ aux fréquences $f_{\mathrm{p}} \pm f_{\mathrm{m}}$.

b) Les trois fréquences sont 995, 1 000 et 1 005 kHz, les bandes latérales ayant une amplitude de 0,25. Le signal occupe la bande de 995 à 1 005 kHz, de largeur $2f_{\mathrm{m}} = 10$ kHz.

c) Chaque station occupe 10 kHz : dans les 100 kHz disponibles, on peut en placer 10 sans recouvrement. C’est ce calcul qui fixe le plan de fréquences (en Europe, 9 kHz entre porteuses).

Réponse. a) porteuse à f_{p} d’amplitude 1, et deux bandes latérales à $f_{\mathrm{p}} \pm f_{\mathrm{m}}$ d’amplitude $\dfrac{m}{2}$ · b) 995, 1 000 et 1 005 kHz, largeur de bande 10 kHz · c) 10 stations.

Correction de l’exercice 15 – Bilan : un même complexe sous tous les angles

a) $1 + i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 - i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$. Par la formule de Moivre, le numérateur vaut $2^7\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{3}}$ et le dénominateur $\big(\sqrt{2}\big)^5\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{4}}$. Le quotient a pour module $\dfrac{128}{4\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{7\pi}{3} + \dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{43\pi}{12}$, soit $-\dfrac{5\pi}{12}$ à 4π près :

$$Z = 16\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{12}}$$

b) Avec $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$ et les formules d’addition, $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Donc $Z = 4\sqrt{2}\big(\sqrt{6}-\sqrt{2}\big) - 4\sqrt{2}\big(\sqrt{6}+\sqrt{2}\big)i = 8\big(\sqrt{3}-1\big) - 8\big(\sqrt{3}+1\big)i$. **Contrôle** du module : $64\Big[\big(\sqrt{3}-1\big)^2 + \big(\sqrt{3}+1\big)^2\Big] = 512 = \big(16\sqrt{2}\big)^2$.

c) Z^n est un réel positif quand $-\dfrac{5n\pi}{12}$ est un multiple de 2π, c’est-à-dire quand 24 divise $5n$; comme 5 et 24 sont premiers entre eux, 24 divise n (théorème de Gauss). Le plus petit entier qui convient est $n = 24$. Pour $n = 12$, l’argument vaut -5π : Z^{12} est réel mais négatif.

Réponse. a) $Z = 16\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{12}}$ · b) $Z = 8\big(\sqrt{3}-1\big) - 8\big(\sqrt{3}+1\big)i$ · c) $n = 24$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).