Plaquette 3 – Formules d'Euler : linéarisation, factorisation d'angle moitié et sommes

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Les formules d'Euler transforment un **produit** de lignes trigonométriques en **somme**, et réciproquement. Deux usages dominent. La **linéarisation** remplace $\cos^n\theta$ par une somme de cosinus d'angles multiples, ce qui rend l'expression intégrable. La **factorisation par l'angle moitié** met $1+\mathrm{e}^{i\theta}$ sous forme exponentielle, ce qui donne module et argument sans aucun calcul de partie réelle. Les deux reposent sur le même geste : reconnaître une somme $\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}$, ou la faire apparaître en mettant $\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$ en facteur.

Exercice 1 – Démontrer les formules d'Euler

En partant de $\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, démontrer les deux formules d'Euler.

Exercice 2 – Linéariser un carré

Linéariser $\cos^2\theta$, puis $\sin^2\theta$.

Exercice 3 – Linéariser un cube

Linéariser $\sin^3\theta$.

Exercice 4 – Linéariser une puissance quatrième

Linéariser $\cos^4\theta$.

Exercice 5 – Un produit de carrés

Linéariser $\cos^2\theta\sin^2\theta$, de deux façons : par les formules d'Euler, et en utilisant $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$.

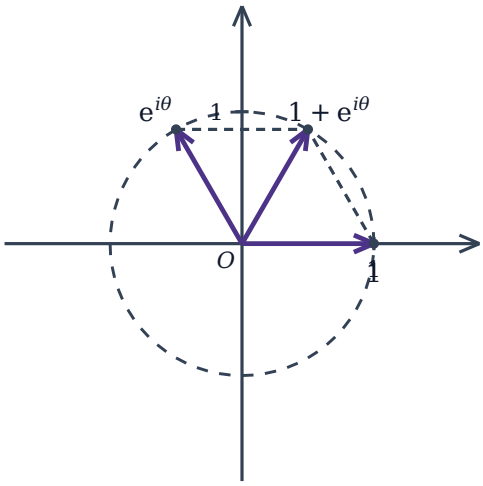
Exercice 6 – Une intégrale rendue possible par la linéarisation

Calculer la valeur exacte de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, puis celle de $\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Factorisation par l'angle moitié

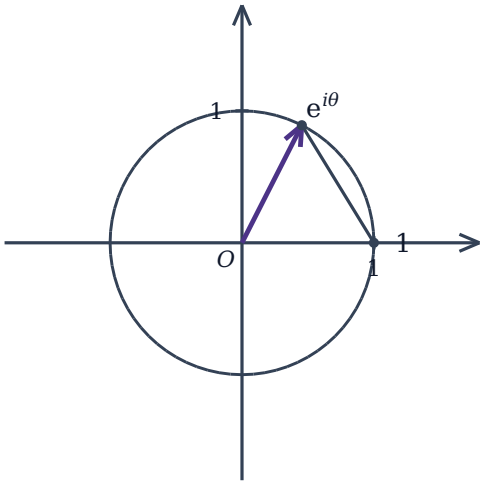
Démontrer que pour tout réel θ : $1 + \mathrm{e}^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.



Le losange construit sur 1 et $\mathrm{e}^{i\theta}$ (ici $\theta = \frac{2\pi}{3}$)

Exercice 8 – La différence, et son module

Démontrer que $1 - \mathrm{e}^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$, puis en déduire que $\left|1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.



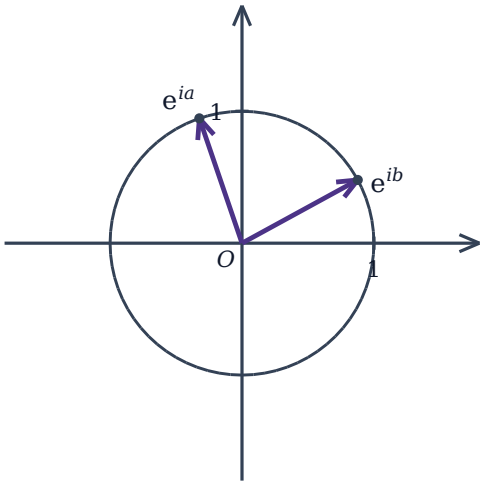
La corde qui joint 1 à $\mathrm{e}^{i\theta}$ sur le cercle unité

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Somme de deux exponentielles

a) Démontrer que pour tous réels a et b : $\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib} = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$.

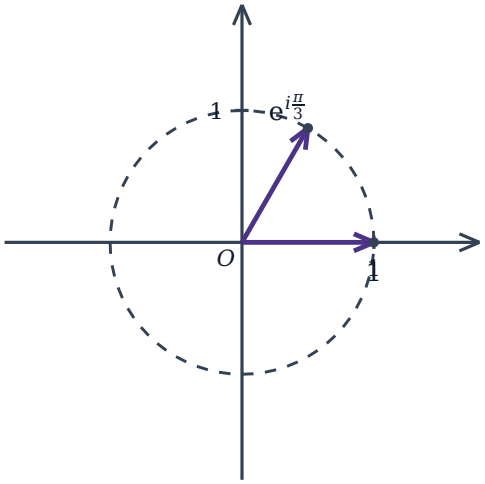
b) En déduire la formule $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.



Deux points du cercle unité

Exercice 10 – Module et argument sans forme algébrique

Déterminer le module et un argument de $Z = 1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, puis vérifier le résultat en passant par la forme algébrique.



Les nombres 1 et $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 11 – Une somme géométrique de complexes

Soit θ un réel qui n'est pas un multiple de 2π, et n un entier supérieur ou égal à 1. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

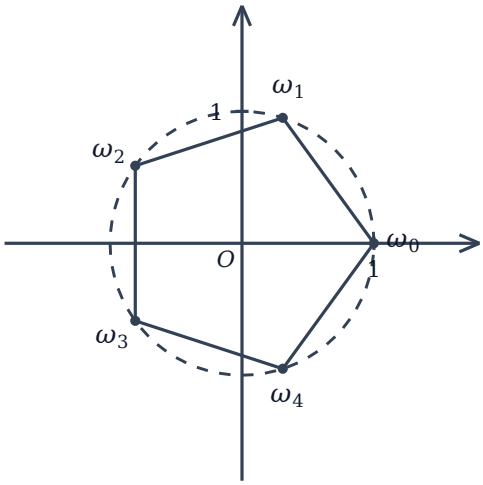
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Exprimer S sous forme d'un quotient.

b) Calculer S pour $n = 6$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 12 – Somme des racines n-ièmes de l'unité

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que la somme des n racines n -ièmes de l'unité est nulle. En déduire la valeur de $\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$.



Les racines cinquièmes de l'unité

Exercice 13 – Transformer un produit en somme

À l'aide des formules d'Euler, démontrer que pour tous réels a et b :

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

Puis calculer $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 14 – Une équation trigonométrique par factorisation

Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $\cos x + \cos(3x) = 0$.

Exercice 15 – Battements de deux diapasons

Deux diapasons émettent simultanément deux sons purs de même amplitude, de fréquences $f_1 = 440$ Hz et $f_2 = 444$ Hz. La pression acoustique résultante est modélisée par

$$p(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$$

a) Écrire $p(t)$ sous la forme $2\cos(2\pi f_e t)\cos\left(2\pi f_p t\right)$, où f_p est la fréquence de la **porteuse** et f_e celle de l'**enveloppe**.

b) L'oreille perçoit un son de fréquence f_p dont l'intensité passe par un maximum

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

chaque fois que $|\cos(2\pi f_e t)| = 1$. Combien de **battements** par seconde entend-on ?

c) Le musicien accorde son instrument en annulant les battements. Quelle fréquence doit-il viser ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).