

Plaquette 3 – Formules d'Euler : linéarisation, factorisation d'angle moitié et sommes

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Les formules d'Euler transforment un **produit** de lignes trigonométriques en **somme**, et réciproquement. Deux usages dominant. La **linéarisation** remplace $\cos^n \theta$ par une somme de cosinus d'angles multiples, ce qui rend l'expression intégrable. La **factorisation par l'angle moitié** met $1 + e^{i\theta}$ sous forme exponentielle, ce qui donne module et argument sans aucun calcul de partie réelle. Les deux reposent sur le même geste : reconnaître une somme $e^{ix} + e^{-ix}$, ou la faire apparaître en mettant $e^{i\frac{\theta}{2}}$ en facteur.

Exercice 1 – Démontrer les formules d'Euler

En partant de $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, démontrer les deux formules d'Euler.

Exercice 2 – Linéariser un carré

Linéariser $\cos^2 \theta$, puis $\sin^2 \theta$.

Exercice 3 – Linéariser un cube

Linéariser $\sin^3 \theta$.

Exercice 4 – Linéariser une puissance quatrième

Linéariser $\cos^4 \theta$.

Exercice 5 – Un produit de carrés

Linéariser $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$, de deux façons : par les formules d'Euler, et en utilisant $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$.

Exercice 6 – Une intégrale rendue possible par la linéarisation

Calculer la valeur exacte de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta$, puis celle de $\int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta$.

Exercice 7 – Factorisation par l'angle moitié

Démontrer que pour tout réel θ : $1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Exercice 8 - La différence, et son module

Démontrer que $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$, puis en déduire que $|1 - e^{i\theta}| = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|$.

Exercice 9 - Somme de deux exponentielles

a) Démontrer que pour tous réels a et b : $e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$.

b) En déduire la formule $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Exercice 10 - Module et argument sans forme algébrique

Déterminer le module et un argument de $Z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, puis vérifier le résultat en passant par la forme algébrique.

Exercice 11 - Une somme géométrique de complexes

Soit θ un réel qui n'est pas un multiple de 2π , et n un entier supérieur ou égal à 1. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}$.

a) Exprimer S sous forme d'un quotient.

b) Calculer S pour $n = 6$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 12 - Somme des racines n -ièmes de l'unité

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que la somme des n racines n -ièmes de l'unité est nulle. En déduire la valeur de $\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$.

Exercice 13 - Transformer un produit en somme

À l'aide des formules d'Euler, démontrer que pour tous réels a et b :

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

Puis calculer $\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 14 - Une équation trigonométrique par factorisation

Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\cos x + \cos(3x) = 0$.

Exercice 15 - Battements de deux diapasons

Deux diapasons émettent simultanément deux sons purs de même amplitude, de fréquences $f_1 = 440$ Hz et $f_2 = 444$ Hz. La pression acoustique résultante est modélisée par

$$p(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$$

a) Écrire $p(t)$ sous la forme $2 \cos(2\pi f_e t) \cos(2\pi f_p t)$, où f_p est la fréquence de la

porteuse et f_e celle de l'**enveloppe**.

b) L'oreille perçoit un son de fréquence f_p dont l'intensité passe par un maximum chaque fois que $|\cos(2\pi f_e t)| = 1$. Combien de **battements** par seconde entend-on ?

c) Le musicien accorde son instrument en annulant les battements. Quelle fréquence doit-il viser ?