Plaquette 1 – Module, argument, forme exponentielle et formules d'Euler

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

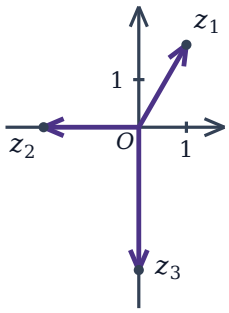
Exercices

Méthode

On passe de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement, on exploite la multiplicativité des modules et l'additivité des arguments, on calcule des puissances avec **Moivre**, et on linéarise avec les formules d'**Euler**. Les racines n -ièmes de l'unité terminent la plaquette.

Exercice 1 – Module et argument

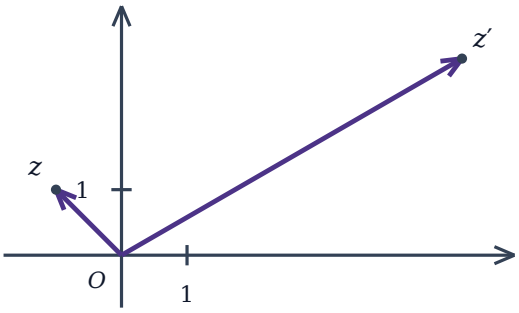
Déterminer le module et un argument de : a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ · b) $z_2 = -2$ · c) $z_3 = -3i$.



Les points d'affixes z_1, z_2, z_3

Exercice 2 – Forme exponentielle

Écrire sous forme exponentielle : a) $z = -1 + i$ · b) $z' = 3\sqrt{3} + 3i$.



Les points d'affixes z et z'

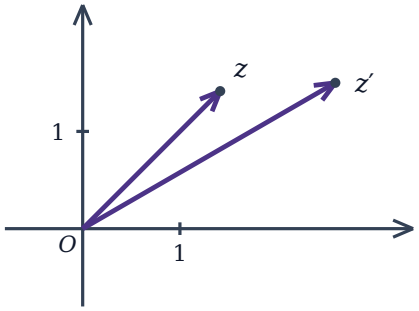
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Retour à la forme algébrique

Écrire sous forme algébrique : a) $4\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ · b) $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 4 – Produit et quotient

Soit $z = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z' = 3\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$. Calculer zz' et $\frac{z}{z'}$ sous forme exponentielle.



Les vecteurs d'affixes z et z'

Exercice 5 – Formule de Moivre

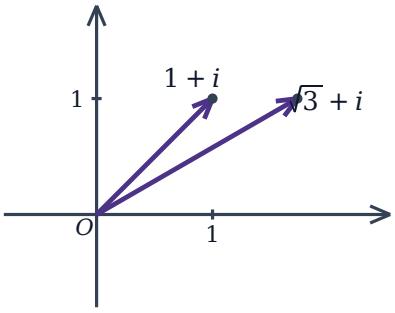
Calculer $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^6$ en passant par la forme exponentielle.

Exercice 6 – Calcul d'un argument par le quotient

Soit $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

a) Écrire numérateur et dénominateur sous forme exponentielle.

b) En déduire le module et un argument de Z.

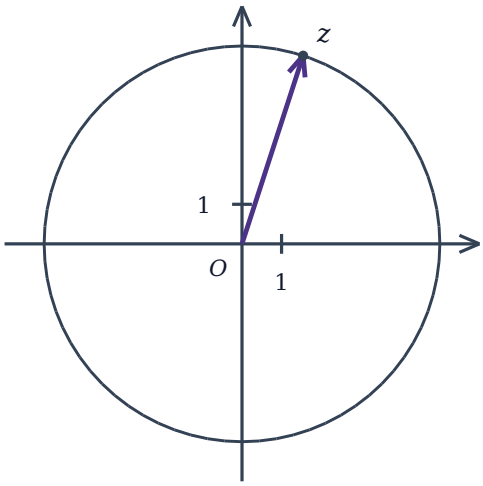


Le numérateur et le dénominateur de Z

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Conjugué et inverse

Soit $z = 5\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$. Donner $\overline{z}$, $\dfrac{1}{z}$ et $-z$ sous forme exponentielle.



Le point d'affixe z, sur le cercle de rayon 5

Exercice 8 – Formules d'Euler

a) Écrire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ à l'aide d'exponentielles complexes.
b) En déduire $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}$ et $\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}$.

Exercice 9 – Linéarisation

À l'aide des formules d'Euler, montrer que $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$.

Exercice 10 – Racines carrées d'un complexe

Déterminer les deux solutions de $z^2 = 4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, sous forme exponentielle.

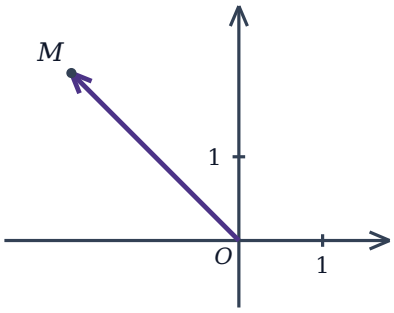
Exercice 11 – Racines cubiques de l'unité

a) Résoudre $z^3 = 1$ dans $\mathbb{C}$, sous forme exponentielle puis algébrique.
b) Vérifier que la somme des trois racines est nulle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Lire module et argument sur une figure

Le point M est placé ci-dessous dans le plan complexe. Lire son affixe z, puis en déduire son module, un argument et sa forme exponentielle.



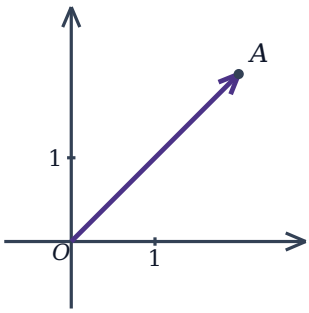
Le point M

Exercice 13 – Multiplier par i : un quart de tour

Soit A le point d'affixe $z_A = 2 + 2i$ et B le point d'affixe $z_B = iz_A$.

a) Calculer z_B sous forme algébrique.

b) Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle, et en déduire la transformation qui envoie A sur B.



Le point A d'affixe 2 + 2i

Exercice 14 – Quand une puissance est-elle réelle ?

Soit $z = \sqrt{3} + i$. Déterminer les entiers $n \geq 1$ tels que z^n soit un réel, puis calculer z^6.

Exercice 15 – Synthèse : puissance et forme algébrique

Soit $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

a) Déterminer le module et un argument de z.

b) Calculer z^8.

c) Calculer z^{2026}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).