

Plaquette 2 – Module, argument et passage d'une forme à l'autre**Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) – Terminale maths expertes**

Exercices

Méthode

Tout le chapitre repose sur un aller-retour : de $a + ib$ vers $re^{i\theta}$, et réciproquement. Dans un sens, on calcule le module puis on identifie l'angle par son cosinus **et** son sinus ; dans l'autre, on remplace $e^{i\theta}$ par $\cos \theta + i \sin \theta$ et on lit les valeurs du cercle trigonométrique. L'erreur la plus fréquente consiste à déterminer l'argument avec le seul cosinus : il reste alors deux angles possibles, et on se trompe de moitié de plan une fois sur deux.

Exercice 1 – Module et argument, cas de base

Déterminer le module et un argument de chacun des complexes suivants : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = 2i$ et $z_4 = -5$.

Exercice 2 – Un argument dans le troisième quadrant

Déterminer le module et un argument de $z = -\sqrt{3} - i$, puis en donner la forme exponentielle.

Exercice 3 – Quatre formes exponentielles

Écrire sous forme exponentielle les complexes 3 , -3 , $-4i$ et $1 - i\sqrt{3}$.

Exercice 4 – Retour à la forme algébrique

Donner la forme algébrique de $2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $3e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $5e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\pi}$.

Exercice 5 – Produit et quotient sous forme exponentielle

On pose $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$. Donner la forme exponentielle de z_1z_2 , de $\frac{z_1}{z_2}$ et de z_1^3 .

Exercice 6 – Une grande puissance par Moivre

Calculer $(1 + i)^{12}$ sous forme algébrique, en passant par la forme exponentielle. Vérifier le résultat par un calcul direct.

Exercice 7 – Puissance d'un complexe du troisième quadrant

Calculer $(-1 + i\sqrt{3})^9$.

Exercice 8 - Argument d'un quotient

On pose $Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$. Déterminer le module et un argument de Z , puis en donner la forme algébrique.

Exercice 9 - Conjugué, inverse et opposé

Soit $z = 4e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Donner la forme exponentielle de $\bar{z}$, de $\frac{1}{z}$, de $-z$ et de $\frac{1}{\bar{z}}$.

Exercice 10 - Une équation de degré 3 par les arguments

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8$, et donner les solutions sous forme algébrique.

Exercice 11 - Racines carrées d'un complexe

Déterminer les deux complexes z tels que $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$, sous forme exponentielle puis algébrique.

Exercice 12 - $\cos(3\theta)$ par la formule de Moivre

En développant $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$ et en utilisant la formule de Moivre, démontrer que pour tout réel θ :

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Exercice 13 - Linéariser $\cos^3\theta$

À l'aide de la question précédente, exprimer $\cos^3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\cos(3\theta)$. Pourquoi cette forme est-elle utile en analyse ?

Exercice 14 - Transformer $a \cos x + b \sin x$

- a) Démontrer que pour tout réel x : $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.
b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$.

Exercice 15 - Amplitude et déphasage d'un signal

Une tension aux bornes d'un dipôle s'écrit, en volts, $u(t) = 5 \cos(\omega t) + 5\sqrt{3} \sin(\omega t)$, où ω est la pulsation en rad/s.

- a) Écrire $u(t)$ sous la forme $U_{\max} \cos(\omega t - \varphi)$, avec $U_{\max} > 0$ et $\varphi \in]-\pi; \pi]$.
b) Donner l'amplitude $U_{\max}$ et le déphasage φ . La tension est-elle en avance ou en retard sur $\cos(\omega t)$?
c) Pour $\omega = 100\pi$ rad/s, déterminer le premier instant $t > 0$ où la tension est maximale, arrondi à la milliseconde.