Plaquette 2 – Module, argument et passage d'une forme à l'autre

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

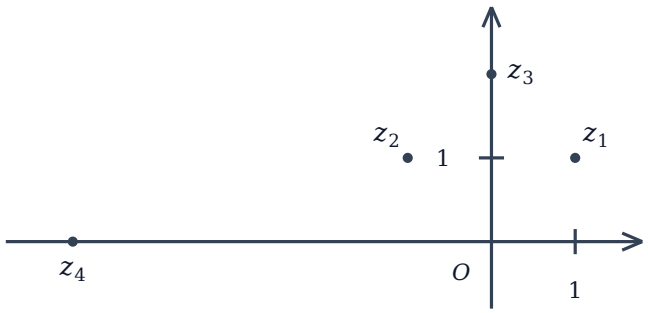
Exercices

Méthode

Tout le chapitre repose sur un aller-retour : de $a + ib$ vers $r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, et réciproquement. Dans un sens, on calcule le module puis on identifie l'angle par son cosinus **et** son sinus ; dans l'autre, on remplace $\mathrm{e}^{i\theta}$ par $\cos\theta + i\sin\theta$ et on lit les valeurs du cercle trigonométrique. L'erreur la plus fréquente consiste à déterminer l'argument avec le seul cosinus : il reste alors deux angles possibles, et on se trompe de moitié de plan une fois sur deux.

Exercice 1 – Module et argument, cas de base

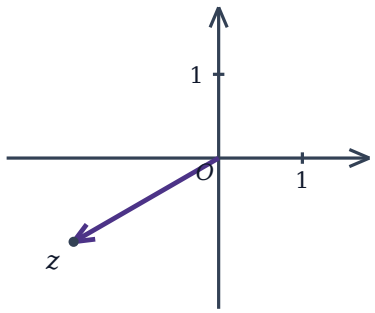
Déterminer le module et un argument de chacun des complexes suivants : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = 2i$ et $z_4 = -5$.



Les quatre points de l'énoncé

Exercice 2 – Un argument dans le troisième quadrant

Déterminer le module et un argument de $z = -\sqrt{3} - i$, puis en donner la forme exponentielle.

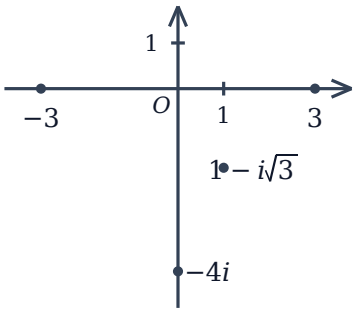


Le point d'affixe $-\sqrt{3} - i$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Quatre formes exponentielles

Écrire sous forme exponentielle les complexes 3, -3, $-4i$ et $1 - i\sqrt{3}$.



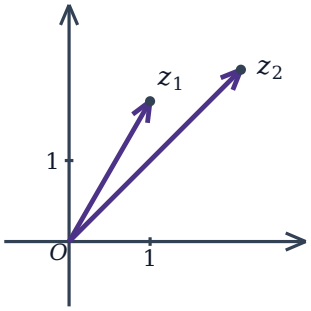
Les quatre nombres à écrire sous forme exponentielle

Exercice 4 – Retour à la forme algébrique

Donner la forme algébrique de $2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$, $3\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$, $5\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{i\pi}$.

Exercice 5 – Produit et quotient sous forme exponentielle

On pose $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 3\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$. Donner la forme exponentielle de $z_1 z_2$, de $\dfrac{z_1}{z_2}$ et de z_1^3.



Les vecteurs d'affixes z_1 et z_2

Exercice 6 – Une grande puissance par Moivre

Calculer $(1 + i)^{12}$ sous forme algébrique, en passant par la forme exponentielle. Vérifier le résultat par un calcul direct.

Exercice 7 – Puissance d'un complexe du troisième quadrant

Calculer $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^9$.

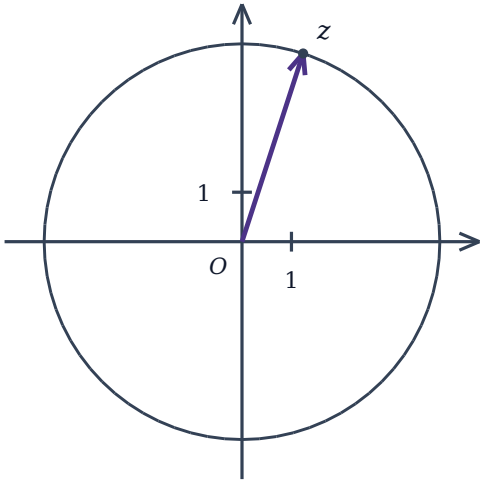
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Argument d'un quotient

On pose $Z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$. Déterminer le module et un argument de Z, puis en donner la forme algébrique.

Exercice 9 – Conjugué, inverse et opposé

Soit $z = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$. Donner la forme exponentielle de $\overline{z}$, de $\dfrac{1}{z}$, de $-z$ et de $\dfrac{1}{\overline{z}}$.



Le point d'affixe z, sur le cercle de rayon 4

Exercice 10 – Une équation de degré 3 par les arguments

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8$, et donner les solutions sous forme algébrique.

Exercice 11 – Racines carrées d'un complexe

Déterminer les deux complexes z tels que $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$, sous forme exponentielle puis algébrique.

Exercice 12 – cos(3θ) par la formule de Moivre

En développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ et en utilisant la formule de Moivre, démontrer que pour tout réel θ :

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Exercice 13 – Linéariser cos³θ

À l'aide de la question précédente, exprimer $\cos^3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\cos(3\theta)$. Pourquoi cette forme est-elle utile en analyse ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Transformer a cos x + b sin x

a) Démontrer que pour tout réel x : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 15 – Amplitude et déphasage d'un signal

Une tension aux bornes d'un dipôle s'écrit, en volts, $u(t) = 5\cos(\omega t) + 5\sqrt{3}\sin(\omega t)$, où ω est la pulsation en rad/s.

a) Écrire $u(t)$ sous la forme $U_{\max}\cos(\omega t - \varphi)$, avec $U_{\max} > 0$ et $\varphi \in]-\pi\,;\pi]$.

b) Donner l'amplitude $U_{\max}$ et le déphasage φ. La tension est-elle en avance ou en retard sur $\cos(\omega t)$?

c) Pour $\omega = 100\pi$ rad/s, déterminer le premier instant $t > 0$ où la tension est maximale, arrondi à la milliseconde.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).