Plaquette 4 – Racines n-ièmes : équations z^n = a et polygones réguliers

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Résoudre $z^n = a$ est mécanique dès qu'on passe en exponentielle : on égale les modules, puis les arguments **modulo** 2π, et on récolte exactement n solutions. L'erreur la plus coûteuse est d'oublier le $+2k\pi$: on ne trouve alors qu'une racine au lieu de n. Quand a n'a pas d'argument remarquable, on passe par la méthode algébrique : un système de trois équations en x et y, dont la troisième — celle des modules — est celle qui débloque tout.

Exercice 1 – Racines quatrièmes de l'unité

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$, sous forme exponentielle puis algébrique. Que peut-on dire de la somme des solutions ?

Exercice 2 – Racines cubiques d'un réel négatif

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -8$, et donner les solutions sous forme algébrique.

Exercice 3 – Six racines et un hexagone

Résoudre $z^6 = 64$ dans $\mathbb{C}$, donner les six solutions sous forme algébrique, puis calculer le périmètre et l'aire du polygone formé par leurs images.

Exercice 4 – Racines quatrièmes d'un réel négatif

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -16$.

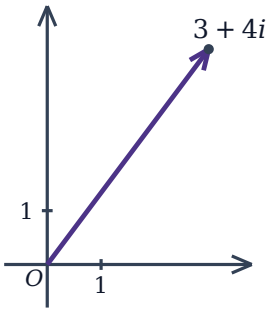
Exercice 5 – Racines cubiques d'un imaginaire pur

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 27i$, et donner les solutions sous forme algébrique exacte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Racines carrées par la méthode algébrique

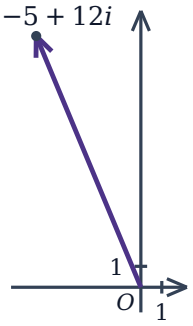
Déterminer les racines carrées de $3+4i$, c'est-à-dire les complexes z tels que $z^2 = 3+4i$.



Le point d'affixe $3+4i$

Exercice 7 – Une seconde racine carrée algébrique

Déterminer les racines carrées de $-5+12i$.



Le point d'affixe $-5+12i$

Exercice 8 – Second degré à coefficients complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$.

Exercice 9 – Une équation bicarrée

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Exercice 10 – Racines cinquièmes d'un complexe quelconque

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 32\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$, en donnant les solutions sous forme exponentielle. Combien y en a-t-il dont l'argument appartient à $[0\,;\pi]$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Produit des racines n-ièmes de l'unité

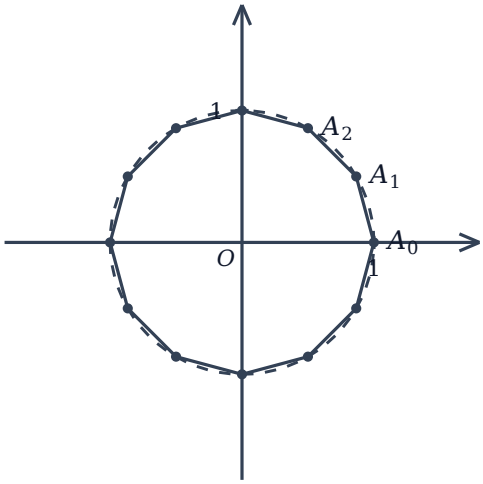
Soit $n \geq 2$. Démontrer que le produit des n racines n-ièmes de l'unité vaut $(-1)^{n+1}$. Vérifier pour $n = 4$ et $n = 5$.

Exercice 12 – Le côté d'un polygone régulier

On note $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ les images des racines n-ièmes de l'unité.

a) Démontrer que $A_0A_1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

b) Calculer le périmètre du polygone pour $n = 12$, arrondi au millième, et comparer à 2π.



Les racines douzièmes de l'unité et le polygone régulier qu'elles forment

Exercice 13 – Une équation mêlant z et son conjugué

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \overline{z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

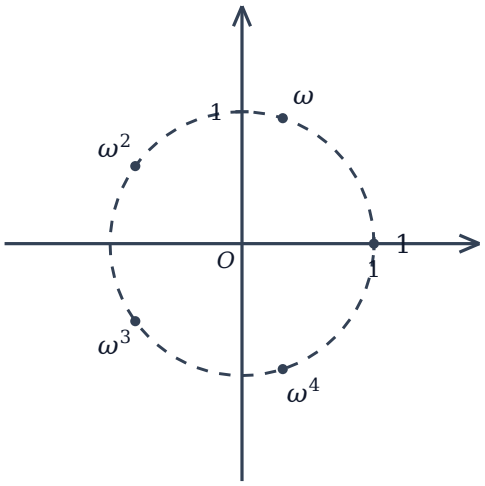
Exercice 14 – Valeur exacte de cos(2π/5)

On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $S = \omega + \omega^4$.

a) Justifier que $S = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, et que $T = \omega^2 + \omega^3 = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

b) Calculer $S + T$ et $S \times T$.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.



Les puissances de $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Un réseau triphasé

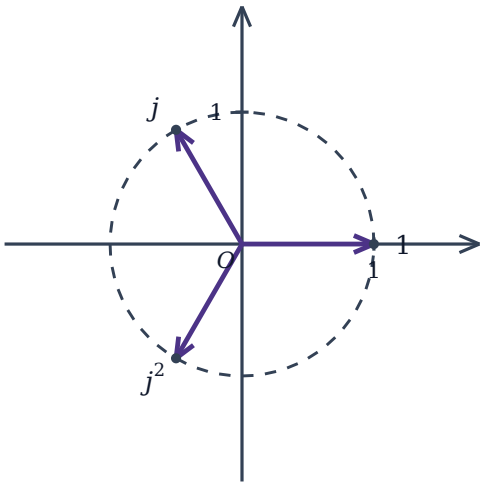
Un alternateur triphasé délivre trois tensions de même amplitude U, déphasées de $\frac{2\pi}{3}$:

$$u_1(t) = U\cos(\omega t) \qquad u_2(t) = U\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \qquad u_3(t) = U\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

a) Écrire u_1, u_2, u_3 comme parties réelles de complexes faisant intervenir $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) Démontrer que $u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = 0$ pour tout instant t.

c) Que représente physiquement ce résultat pour le câble de **neutre** d'une installation triphasée équilibrée ?



Les trois nombres 1, j et j^2

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).