Plaquette 5 – Synthèse : sommes trigonométriques, spirales et applications

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Plaquette de fin de chapitre : chaque exercice combine deux outils. La méthode qui revient le plus est le **passage par le complexe** — une somme de cosinus devient la partie réelle d'une somme géométrique, un produit de distances devient un produit de modules, une amplitude physique devient un module. On termine par des applications où l'écriture complexe n'est pas un artifice mais l'outil naturel : antennes, interférences, modulation.

Exercice 1 – Somme de cosinus

Soit θ un réel non multiple de 2π et n un entier naturel. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

Exercice 2 – Somme de sinus, et application numérique

a) Écrire la formule analogue pour $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

b) Calculer $\sum_{k=0}^{5} \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$ par la formule, puis vérifier terme à terme.

Exercice 3 – cos(4θ) par Moivre

Démontrer que pour tout réel θ : $\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$.

Exercice 4 – sin(4θ) et une factorisation

Démontrer que $\sin(4\theta) = 4\sin\theta\cos\theta\left(2\cos^2\theta - 1\right)$, puis résoudre $\sin(4\theta) = 0$ dans $[0\,;\pi]$.

Exercice 5 – Une équation par égalité de cosinus

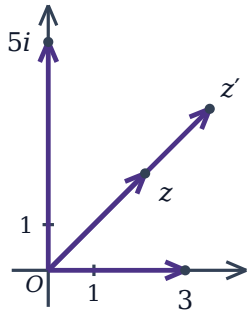
Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $\cos(3x) = \cos x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Inégalité triangulaire et cas d'égalité

a) Démontrer que pour tous complexes z et z' : $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

b) Déterminer le cas d'égalité, et l'illustrer avec $z = 3\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z' = 5\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.



Deux couples de vecteurs : z, z' puis 3, $5i$

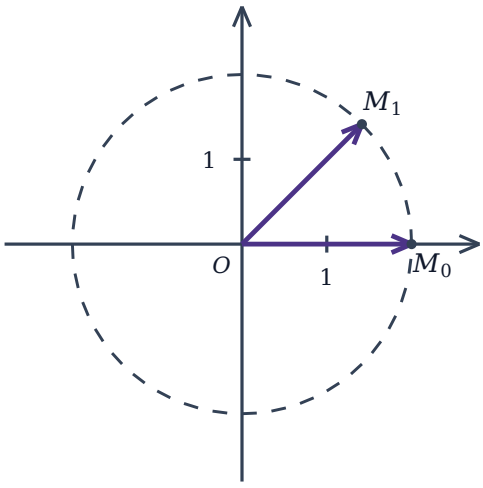
Exercice 7 – Des points qui tournent

On définit $z_0 = 2$ et $z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{4}} z_n$. On note M_n le point d'affixe z_n.

a) Exprimer z_n en fonction de n, et donner z_3 sous forme algébrique.

b) Démontrer que la suite (z_n) est périodique, et préciser sa période.

c) Calculer la longueur de la ligne brisée $M_0M_1\ldots M_8$, et la comparer au périmètre du cercle parcouru.



Les deux premiers points, sur le cercle de rayon 2

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

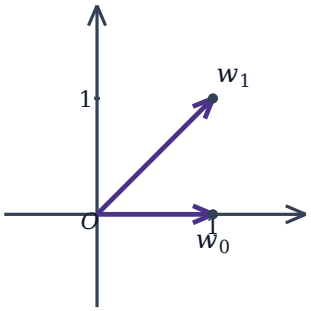
Exercice 8 – Une spirale sortante

On pose $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = (1+i)w_n$.

a) Exprimer $|w_n|$ et $\arg(w_n)$ en fonction de n.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $|w_n| > 1\,000$.

c) Pour quelles valeurs de n le point d'affixe w_n est-il sur l'axe des réels ?



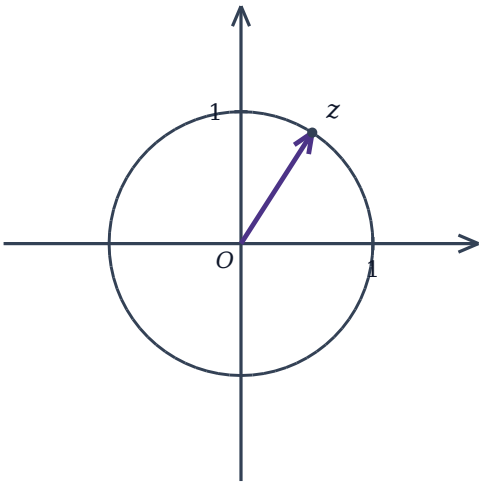
Les deux premiers points de la suite

Exercice 9 – Une équation de degré apparent 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^5 = (z-1)^5$. Combien de solutions l'équation admet-elle, et que remarque-t-on à leur sujet ?

Exercice 10 – Puissances réelles sur le cercle unité

Déterminer tous les complexes z de module 1 tels que z^6 soit un réel. Combien y en a-t-il, et comment sont-ils disposés ?



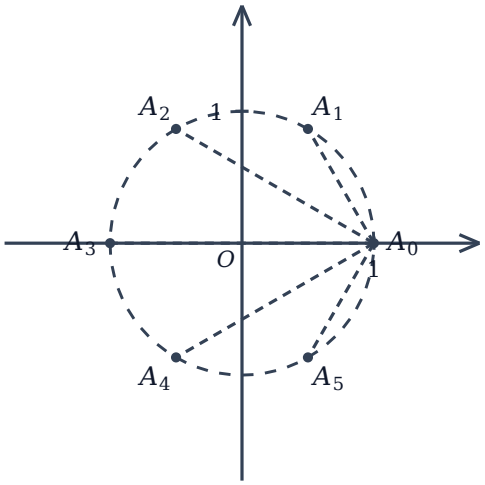
Un complexe z de module 1

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Produit des distances dans un polygone régulier

Soit $n \geq 2$, et A_0, …, A_{n-1} les images des racines n-ièmes de l'unité. Démontrer que

$$A_0A_1 \times A_0A_2 \times \cdots \times A_0A_{n-1} = n$$



Le cas $n = 6$: les distances de A_0 aux autres sommets

Exercice 12 – Interférences de deux sources

Deux sources émettent des ondes de même amplitude. En un point de l'écran, l'amplitude complexe résultante vaut $A = a\left(1 + \mathrm{e}^{i\varphi}\right)$, où $a > 0$ et où φ est le **déphasage** entre les deux ondes. L'intensité lumineuse perçue est proportionnelle à $|A|^2$.

a) Démontrer que $|A|^2 = 4a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

b) Pour quelles valeurs de φ l'intensité est-elle maximale ? nulle ?

c) Quel est le rapport entre l'intensité maximale et celle d'une source seule ?

Exercice 13 – Un réseau de N antennes

Un réseau de N antennes alignées émet des signaux de même amplitude, déphasés de φ d'une antenne à la suivante. L'amplitude résultante est $A = a\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{ik\varphi}$.

a) Démontrer que pour φ non multiple de 2π : $|A| = a\dfrac{\left|\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|}$.

b) Que vaut $|A|$ lorsque φ est multiple de 2π ? Commenter.

c) Pour $N = 8$, donner les valeurs de φ dans $]0\,;2\pi[$ pour lesquelles l'amplitude est nulle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Modulation d'amplitude

Un émetteur radio en modulation d'amplitude transmet le signal

$$s(t) = [1 + m\cos(2\pi f_{\mathrm{m}} t)]\cos\left(2\pi f_{\mathrm{p}} t\right)$$

où f_{p} est la fréquence porteuse, f_{m} celle du signal modulant et m le taux de modulation.

a) Démontrer que $s(t)$ est la somme de **trois** signaux sinusoïdaux, dont on précisera les fréquences et les amplitudes.

b) Pour $f_{\mathrm{p}} = 1\,000$ kHz, $f_{\mathrm{m}} = 5$ kHz et $m = 0{,}5$, donner les trois fréquences et la **largeur de bande** occupée.

c) Combien de stations peut-on placer entre 1 000 et 1 100 kHz sans recouvrement ?

Exercice 15 – Bilan : un même complexe sous tous les angles

On pose $Z = \dfrac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{7}}{(1 - i)^{5}}$.

a) Donner la forme exponentielle de Z.

b) En déduire sa forme algébrique exacte.

c) Déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que Z^{n} soit un réel positif.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).