

## Plaquette 5 - Synthèse : sommes trigonométriques, spirales et applications

### Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

#### Exercices

#### Méthode

Plaquette de fin de chapitre : chaque exercice combine deux outils. La méthode qui revient le plus est le **passage par le complexe** — une somme de cosinus devient la partie réelle d'une somme géométrique, un produit de distances devient un produit de modules, une amplitude physique devient un module. On termine par des applications où l'écriture complexe n'est pas un artifice mais l'outil naturel : antennes, interférences, modulation.

#### Exercice 1 - Somme de cosinus

Soit  $\theta$  un réel non multiple de  $2\pi$  et  $n$  un entier naturel. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

#### Exercice 2 - Somme de sinus, et application numérique

- Écrire la formule analogue pour  $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ .
- Calculer  $\sum_{k=0}^5 \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$  par la formule, puis vérifier terme à terme.

#### Exercice 3 - $\cos(4\theta)$ par Moivre

Démontrer que pour tout réel  $\theta$  :  $\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ .

#### Exercice 4 - $\sin(4\theta)$ et une factorisation

Démontrer que  $\sin(4\theta) = 4\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)$ , puis résoudre  $\sin(4\theta) = 0$  dans  $[0; \pi]$ .

#### Exercice 5 - Une équation par égalité de cosinus

Résoudre dans  $[0; 2\pi[$  l'équation  $\cos(3x) = \cos x$ .

#### Exercice 6 - Inégalité triangulaire et cas d'égalité

- Démontrer que pour tous complexes  $z$  et  $z'$  :  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ .
- Déterminer le cas d'égalité, et l'illustrer avec  $z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$  et  $z' = 5e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

**Exercice 7 - Des points qui tournent**

On définit  $z_0 = 2$  et  $z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{4}} z_n$ . On note  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

- Exprimer  $z_n$  en fonction de  $n$ , et donner  $z_3$  sous forme algébrique.
- Démontrer que la suite  $(z_n)$  est périodique, et préciser sa période.
- Calculer la longueur de la ligne brisée  $M_0 M_1 \dots M_8$ , et la comparer au périmètre du cercle parcouru.

**Exercice 8 - Une spirale sortante**

On pose  $w_0 = 1$  et  $w_{n+1} = (1 + i)w_n$ .

- Exprimer  $|w_n|$  et  $\arg(w_n)$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $|w_n| > 1\,000$ .
- Pour quelles valeurs de  $n$  le point d'affixe  $w_n$  est-il sur l'axe des réels ?

**Exercice 9 - Une équation de degré apparent 5**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(z + 1)^5 = (z - 1)^5$ . Combien de solutions l'équation admet-elle, et que remarque-t-on à leur sujet ?

**Exercice 10 - Puissances réelles sur le cercle unité**

Déterminer tous les complexes  $z$  de module 1 tels que  $z^6$  soit un réel. Combien y en a-t-il, et comment sont-ils disposés ?

**Exercice 11 - Produit des distances dans un polygone régulier**

Soit  $n \geq 2$ , et  $A_0, \dots, A_{n-1}$  les images des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Démontrer que

$$A_0 A_1 \times A_0 A_2 \times \dots \times A_0 A_{n-1} = n$$

**Exercice 12 - Interférences de deux sources**

Deux sources émettent des ondes de même amplitude. En un point de l'écran, l'amplitude complexe résultante vaut  $A = a(1 + e^{i\varphi})$ , où  $a > 0$  et où  $\varphi$  est le **déphasage** entre les deux ondes. L'intensité lumineuse perçue est proportionnelle à  $|A|^2$ .

- Démontrer que  $|A|^2 = 4a^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ .
- Pour quelles valeurs de  $\varphi$  l'intensité est-elle maximale ? nulle ?
- Quel est le rapport entre l'intensité maximale et celle d'une source seule ?

**Exercice 13 - Un réseau de N antennes**

Un réseau de  $N$  antennes alignées émet des signaux de même amplitude, déphasés de  $\varphi$  d'une antenne à la suivante. L'amplitude résultante est  $A = a \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\varphi}$ .

- a) Démontrer que pour  $\varphi$  non multiple de  $2\pi$  :  $|A| = a \frac{\left| \sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) \right|}{\left| \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right|}$ .
- b) Que vaut  $|A|$  lorsque  $\varphi$  est multiple de  $2\pi$  ? Commenter.
- c) Pour  $N = 8$ , donner les valeurs de  $\varphi$  dans  $]0 ; 2\pi[$  pour lesquelles l'amplitude est nulle.

#### Exercice 14 - Modulation d'amplitude

Un émetteur radio en modulation d'amplitude transmet le signal

$$s(t) = [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t)$$

où  $f_p$  est la fréquence porteuse,  $f_m$  celle du signal modulant et  $m$  le taux de modulation.

- a) Démontrer que  $s(t)$  est la somme de **trois** signaux sinusoïdaux, dont on précisera les fréquences et les amplitudes.
- b) Pour  $f_p = 1\,000$  kHz,  $f_m = 5$  kHz et  $m = 0,5$ , donner les trois fréquences et la **largeur de bande** occupée.
- c) Combien de stations peut-on placer entre 1 000 et 1 100 kHz sans recouvrement ?

#### Exercice 15 - Bilan : un même complexe sous tous les angles

On pose  $Z = \frac{(1 + i\sqrt{3})^7}{(1 - i)^5}$ .

- a) Donner la forme exponentielle de  $Z$ .
- b) En déduire sa forme algébrique exacte.
- c) Déterminer le plus petit entier  $n \geq 1$  tel que  $Z^n$  soit un réel positif.