Plaquette 4 – Démontrer avec les nombres premiers

Nombres premiers — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

La plaquette de démonstration : **lemme d'Euclide**, unicité de la décomposition, **infinité** des nombres premiers, **irrationalité** de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{p}$, propriétés des premiers supérieurs à 3, et surtout la mise en garde contre les **fausses conjectures** — une formule qui donne des nombres premiers pendant quarante essais peut échouer au quarantième.

Exercice 1 – Le lemme d'Euclide

a) Démontrer le lemme d'Euclide : si p est premier et $p \mid ab$, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

b) Montrer par un contre-exemple que l'énoncé devient faux si p n'est pas premier.

Exercice 2 – Un premier qui divise une puissance

Soit p un nombre premier et a un entier.

a) Montrer que si $p \mid a^2$, alors $p \mid a$.

b) Généraliser à $p \mid a^n$.

Exercice 3 – L'infinité des nombres premiers

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 4 – L'irrationalité de racine de 2

Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 5 – Généraliser à racine de p

Soit p un nombre premier. Démontrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

En déduire que $\sqrt{6}$ l'est aussi.

Exercice 6 – Des premiers en progression

a) Trouver trois nombres premiers de la forme p, $p+2$, $p+4$.

b) Montrer que $(3\,;5\,;7)$ est le **seul** triplet de ce type.

Exercice 7 – Une conjecture qui s'effondre

On considère $P(n) = n^2 + n + 41$.

a) Calculer $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ et $P(10)$: ces valeurs sont-elles premières ?

b) Calculer $P(40)$. Conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Divisible par 24

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3. Montrer que 24 divise $p^2 - 1$.

Exercice 9 – Somme de deux nombres premiers

a) Montrer que si la somme de deux nombres premiers est impaire, alors l'un des deux vaut 2.

b) Écrire 2 026 comme somme de deux nombres premiers (on pourra essayer 3, 5, 17, ...).

Exercice 10 – Des trous dans la suite des premiers

Soit $n \geq 2$ un entier. On note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Montrer que les $n - 1$ entiers consécutifs $n! + 2$, $n! + 3$, ..., $n! + n$ ne sont **aucun** premiers.

Exercice 11 – Le produit des premiers plus un

a) Calculer $2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$: ce nombre est-il premier ?

b) Calculer $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1$ et le décomposer.

c) Que peut-on dire, malgré tout, des facteurs premiers de ces nombres ?

Exercice 12 – Unicité de la décomposition à l'œuvre

Montrer qu'il n'existe aucun couple d'entiers naturels non nuls $(a\,;b)$ tel que $a^2 = 12\,b^2$.

Exercice 13 – Premiers et carrés

a) Montrer que si p est premier et $p \geq 5$, alors $p^2 + 2$ n'est pas premier.

b) Vérifier pour $p = 5$, 7 et 11.

Exercice 14 – Combien de facteurs premiers ?

a) Montrer que si n est composé, il admet un facteur premier $p \leq \sqrt{n}$.

b) En déduire que tout entier $n \geq 2$ inférieur à 121 et non divisible par 2, 3, 5 ni 7 est premier.

Exercice 15 – Bilan : trois démonstrations

a) Montrer que $\sqrt{45}$ est irrationnel.

b) Soit p premier avec $p > 3$. Montrer que $p^2 + 5$ est divisible par 6.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, les nombres $n^2 + n$ et $n^2 + n + 1$ sont premiers entre eux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).