

Plaque 2 – Primalité, crible et décomposition en facteurs premiers

Nombres premiers — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Les gestes de base du chapitre : **tester** si un entier est premier en s'arrêtant à $\sqrt{n}$, construire le **crible d'Ératosthène**, **décomposer** un entier en facteurs premiers, et lire dans cette décomposition ce qu'on cherche — un nombre de diviseurs, un carré parfait, un cube.

Exercice 1 – Tester la primalité

Les entiers suivants sont-ils premiers ? Justifier.

- a) 211
- b) 221
- c) 323

Exercice 2 – Le crible d'Ératosthène

- a) Construire le crible d'Ératosthène jusqu'à 60 et donner la liste des nombres premiers obtenus.
- b) Jusqu'à quel nombre faut-il rayer des multiples pour un crible allant jusqu'à 60 ? Justifier.

Exercice 3 – Un grand test de primalité

- a) Démontrer que si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.
- b) En déduire que 2 027 est premier (on admettra la liste des premiers jusqu'à 45).

Exercice 4 – Décomposer en facteurs premiers

Décomposer en produit de facteurs premiers :

- a) 360
- b) 1 001
- c) 2 025
- d) 5 040

Exercice 5 – L'année 2026

- a) Décomposer 2 026 en produit de facteurs premiers (on montrera que 1 013 est premier).
- b) En déduire la liste de tous les diviseurs positifs de 2 026.

Exercice 6 - Compter les diviseurs

- a) Combien 360 admet-il de diviseurs positifs ?
- b) Même question pour 2 025 et pour 5 040.
- c) Expliquer la formule utilisée.

Exercice 7 - Le plus petit entier à 12 diviseurs

Déterminer le plus petit entier naturel possédant exactement 12 diviseurs positifs.

Exercice 8 - Exactement trois diviseurs

Déterminer tous les entiers naturels ayant **exactement trois** diviseurs positifs.

Exercice 9 - La forme $6k \pm 1$

- a) Montrer que tout nombre premier $p > 3$ s'écrit $6k + 1$ ou $6k - 1$.
- b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 10 - Un faux nombre premier

- a) Décomposer 1 729 en produit de facteurs premiers.
- b) Combien ce nombre a-t-il de diviseurs ?

Exercice 11 - Rendre un produit carré

- a) Déterminer le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que $360k$ soit un **carré parfait**.
- b) Déterminer le plus petit entier naturel $m \geq 1$ tel que $500m$ soit un **cube parfait**.

Exercice 12 - Le contre-exemple de Mersenne

On s'intéresse aux nombres de la forme $2^n - 1$.

- a) Calculer $2^n - 1$ pour $n = 2, 3, 5, 7$: ces nombres sont-ils premiers ?
- b) Montrer que $2^{11} - 1 = 2 047$ n'est pas premier.
- c) Montrer que si n n'est pas premier, alors $2^n - 1$ ne l'est pas non plus.

Exercice 13 - Des rectangles d'aire imposée

Un artisan fabrique des plateaux rectangulaires d'aire 360 cm^2 , dont les deux dimensions sont des nombres entiers de centimètres.

- a) Combien de formats différents peut-il fabriquer (on ne distingue pas $a \times b$ de $b \times a$) ?
- b) Quel est le format le plus proche du carré ?

Exercice 14 – Décomposition et racine carrée

- a) Simplifier $\sqrt{5\,040}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible.
- b) Le nombre $\sqrt{360} \times \sqrt{10}$ est-il un entier ?

Exercice 15 – Bilan : décomposer et conclure

- a) Décomposer 4 900 en facteurs premiers, donner son nombre de diviseurs et dire s'il s'agit d'un carré parfait.
- b) Déterminer le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $1\,176k$ soit un carré parfait.
- c) Un club de 221 membres veut se répartir en groupes de même effectif, chaque groupe comptant plus d'une personne. Quelles répartitions sont possibles ?