Plaquette 1 – Primalité, décomposition et petit théorème de Fermat

Nombres premiers — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On teste la primalité en s'arrêtant à $\sqrt{n}$, on décompose en facteurs premiers pour compter les diviseurs ou calculer un PGCD, on utilise le **petit théorème de Fermat** pour les restes de grandes puissances, et on démontre quelques propriétés classiques.

Exercice 1 – Tester la primalité

Ces nombres sont-ils premiers ? Justifier en précisant jusqu'où l'on teste.

a) 91
b) 97
c) 221

Exercice 2 – Décomposer en facteurs premiers

Décomposer en produit de facteurs premiers : a) 360 · b) 1 001 · c) 2 025.

Exercice 3 – Compter les diviseurs

a) Combien 360 a-t-il de diviseurs positifs ?
b) Combien 2 025 en a-t-il ?

Exercice 4 – PGCD et PPCM par décomposition

Soit $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3 \times 7$.

a) Calculer $\text{pgcd}(a\,;b)$.
b) Calculer $\text{ppcm}(a\,;b)$.
c) Vérifier la relation $\text{pgcd} \times \text{ppcm} = ab$.

Exercice 5 – Lemme d'Euclide

a) Énoncer le lemme d'Euclide.
b) Sachant que $7 \mid 5n$, que peut-on conclure ?
c) L'implication reste-t-elle vraie si p n'est pas premier ?

Exercice 6 – Petit théorème de Fermat

a) Énoncer le petit théorème de Fermat.
b) Calculer $2^{10} \bmod 11$ puis $3^6 \bmod 7$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Reste d'une grande puissance

Déterminer le reste de la division de 2^{2026} par 11.

Exercice 8 – Utiliser Fermat pour une divisibilité

Montrer que pour tout entier a, $13 \mid \left(a^{13} - a\right)$.

Exercice 9 – Nombres premiers entre eux

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n et $n+1$ sont premiers entre eux, puis que n et $2n+1$ le sont aussi.

Exercice 10 – Infinité des nombres premiers

Reconstituer la démonstration d'Euclide : on suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de premiers $p_1, \ldots, p_k$, et on considère $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$.

Conclure.

Exercice 11 – Décomposition et carré parfait

a) Décomposer 1 176 en facteurs premiers.

b) Ce nombre est-il un carré parfait ? Par quel plus petit entier faut-il le multiplier pour en obtenir un ?

Exercice 12 – Diviseurs et problème concret

Un professeur veut répartir 84 élèves en groupes de même effectif, chaque groupe comptant entre 5 et 15 élèves.

a) Décomposer 84 en facteurs premiers et lister ses diviseurs.

b) Quelles tailles de groupes sont possibles ?

Exercice 13 – Crible d'Ératosthène

a) Dresser la liste des nombres premiers inférieurs à 50 à l'aide du crible d'Ératosthène.

b) Pourquoi suffit-il de barrer les multiples de 2, 3, 5 et 7 ?

Exercice 14 – Choisir un nombre par son nombre de diviseurs

On cherche un entier de la forme $n = 2^a \times 3^b$, avec $a \geq 1$ et $b \geq 1$, qui possède exactement 12 diviseurs positifs. Donner toutes les possibilités, puis la plus petite valeur de n.

Exercice 15 – Synthèse : reste et Fermat

a) Déterminer le reste de 5^{100} modulo 7.

b) Déterminer le reste de 5^{100} modulo 13.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).