

Plaquette 4 - Équations diophantiennes $ax + by = c$

PGCD, théorème de Bézout, Gauss — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthode de résolution de $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$.

- **Existence** : l'équation admet des solutions **si et seulement si** $d = \text{pgcd}(a; b)$ divise c . Sinon, on conclut immédiatement : aucune solution.
- **Simplification** : si $d > 1$ divise c , on divise toute l'équation par d pour se ramener au cas où a et b sont premiers entre eux.
- **Solution particulière** $(x_0; y_0)$: par lecture directe si les nombres sont petits, sinon par **remontée de l'algorithme d'Euclide** (identité de Bézout $au + bv = 1$, puis multiplication par c).
- **Solutions générales** : on soustrait $ax_0 + by_0 = c$ de $ax + by = c$, ce qui donne $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$. Comme $\text{pgcd}(a; b) = 1$, le **théorème de Gauss** donne $b \mid (x - x_0)$, d'où

$$x = x_0 + bk \quad y = y_0 - ak \quad k \in \mathbb{Z}$$

- **Vérification finale** : on remplace dans l'équation, le paramètre k doit disparaître.
- **Contraintes du problème** : pour des entiers naturels, on résout le système $x \geq 0$ et $y \geq 0$, qui encadre k ; le nombre de solutions est alors fini.
- **Lecture géométrique** : les solutions sont les **points à coordonnées entières** de la droite d'équation $ax + by = c$, régulièrement espacés du vecteur $(b; -a)$.

Correction de l'exercice 1 - Existe-t-il des solutions ?

Le critère du cours : $ax + by = c$ a des solutions **si et seulement si** $\text{pgcd}(a; b)$ divise c .

a) $\text{pgcd}(12; 18) = 6$, et $21 = 6 \times 3 + 3 : 6$ ne divise pas 21.

- **Aucune solution.** Justification directe : $12x + 18y = 6(2x + 3y)$ est toujours un multiple de 6, alors que 21 n'en est pas un.

b) $\text{pgcd}(12; 18) = 6$ et $30 = 6 \times 5$: le critère est vérifié.

- **Il y a des solutions** (par exemple $x = 1, y = 1 : 12 + 18 = 30 \checkmark$).

c) $\text{pgcd}(4; 6) = 2$, et 9 est impair : 2 ne divise pas 9.

- **Aucune solution** : $4x + 6y$ est toujours pair.
- **Le réflexe** : avant tout calcul, comparer le PGCD des coefficients au second membre. C'est une ligne de rédaction, et elle évite parfois toute une page inutile.

Réponse. a) non ($6 \nmid 21$) · b) oui ($6 \mid 30$) · c) non ($2 \nmid 9$).

Correction de l'exercice 2 - Une solution particulière à l'œil

a) $\text{pgcd}(5; 3) = 1$, et 1 divise 7 : l'équation admet des solutions.

b) On essaie de petites valeurs de x et on regarde si $7 - 5x$ est un multiple de 3 :

x	0	1	2
$7 - 5x$	7	2	-3
multiple de 3 ?	non	non	oui

- Pour $x = 2$: $3y = -3$, donc $y = -1$.
- **Une solution particulière est** $(2; -1)$: $5 \times 2 + 3 \times (-1) = 10 - 3 = 7$ ✓.
- **Conseil de méthode** : on fait varier la variable dont le coefficient est le plus grand, il y a moins d'essais à faire. Trois essais suffisent toujours ici, puisque $7 - 5x$ parcourt les trois restes modulo 3.

Réponse. $(x_0; y_0) = (2; -1)$.

Correction de l'exercice 3 - Résolution complète

Étape 1 : une solution particulière. $(x_0; y_0) = (2; -1)$, car $10 - 3 = 7$.

Étape 2 : on soustrait les deux égalités.

- $5x + 3y = 7$ et $5 \times 2 + 3 \times (-1) = 7$.
- Par différence : $5(x - 2) + 3(y + 1) = 0$, soit $5(x - 2) = -3(y + 1)$.

Étape 3 : le théorème de Gauss.

- 3 divise $5(x - 2)$ et $\text{pgcd}(3; 5) = 1$, donc 3 divise $x - 2$: $x = 2 + 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- On reporte : $5 \times 3k = -3(y + 1)$, donc $5k = -(y + 1)$ et $y = -1 - 5k$.

Étape 4 : vérification (le paramètre doit disparaître).

- $5(2 + 3k) + 3(-1 - 5k) = 10 + 15k - 3 - 15k = 7$ ✓.
- **Conclusion** : $S = \{(2 + 3k; -1 - 5k), k \in \mathbb{Z}\}$.
- Contrôle pour $k = 1$: $(5; -6)$, et $25 - 18 = 7$ ✓.

Réponse. $(x; y) = (2 + 3k; -1 - 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 4 - Passer par Bézout

Les coefficients sont trop grands pour deviner : on calcule une identité de Bézout.

Étape 1 : algorithme d'Euclide.

- $40 = 17 \times 2 + 6$; $17 = 6 \times 2 + 5$; $6 = 5 + 1$.
- Le PGCD vaut 1, l'équation a donc des solutions.

Étape 2 : remontée.

- $1 = 6 - 5 = 6 - (17 - 2 \times 6) = 3 \times 6 - 17$.
- $6 = 40 - 2 \times 17$ donne $1 = 3(40 - 2 \times 17) - 17 = 3 \times 40 - 7 \times 17$.
- Vérification : $120 - 119 = 1$ ✓. Une solution particulière est donc $(x_0; y_0) = (-7; 3)$.

Étape 3 : solutions générales.

- $17(x + 7) + 40(y - 3) = 0$, soit $17(x + 7) = -40(y - 3)$.
- 40 divise $17(x + 7)$ avec $\text{pgcd}(17; 40) = 1$: d'après Gauss, $40 \mid (x + 7)$, donc $x = -7 + 40k$.
- En reportant : $y = 3 - 17k$.
- **Vérification** : $17(-7 + 40k) + 40(3 - 17k) = -119 + 680k + 120 - 680k = 1$ ✓.

Réponse. $(x; y) = (-7 + 40k; 3 - 17k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 5 - Un second membre différent de 1

Étape 1 : Bézout pour 23 et 17.

- $23 = 17 + 6$; $17 = 6 \times 2 + 5$; $6 = 5 + 1$.
- Remontée :
 $1 = 6 - 5 = 6 - (17 - 2 \times 6) = 3 \times 6 - 17 = 3(23 - 17) - 17 = 3 \times 23 - 4 \times 17$.
- Vérification : $69 - 68 = 1 \checkmark$.

Étape 2 : on multiplie par 5 (c'est le second membre visé).

- $23 \times 15 - 17 \times 20 = 5$, donc $(x_0; y_0) = (15; -20)$ est solution.

Étape 3 : solutions générales.

- $23(x - 15) = -17(y + 20)$, et $\text{pgcd}(23; 17) = 1$: d'après Gauss, $17 \mid (x - 15)$.
- $x = 15 + 17k$ et $y = -20 - 23k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- **Vérification** : $23(15 + 17k) + 17(-20 - 23k) = 345 + 391k - 340 - 391k = 5 \checkmark$.

Autre écriture de la même famille. Pour $k = -1$ on obtient $(-2; 3)$, beaucoup plus lisible :

- $23 \times (-2) + 17 \times 3 = -46 + 51 = 5 \checkmark$, et la famille s'écrit aussi $(-2 + 17k; 3 - 23k)$.
- Deux corrigés peuvent donc présenter des solutions particulières différentes **sans se contredire**.

Réponse. $(x; y) = (15 + 17k; -20 - 23k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 6 - Quand le PGCD ne vaut pas 1

Étape 1 : existence et simplification.

- $\text{pgcd}(12; 18) = 6$ et $6 \mid 30$: il y a des solutions.
- On divise **toute** l'équation par 6 : $2x + 3y = 5$.
- Les coefficients sont maintenant premiers entre eux : c'est indispensable avant d'appliquer Gauss.

Étape 2 : solution particulière. $x = 1$, $y = 1$ convient ($2 + 3 = 5$).

Étape 3 : solutions générales.

- $2(x - 1) = -3(y - 1)$, et $\text{pgcd}(2; 3) = 1$: $3 \mid (x - 1)$, donc $x = 1 + 3k$.
- En reportant : $2 \times 3k = -3(y - 1)$, donc $y = 1 - 2k$.
- **Vérification dans l'équation de départ** :
 $12(1 + 3k) + 18(1 - 2k) = 12 + 36k + 18 - 36k = 30 \checkmark$.
- **Piège à éviter** : appliquer Gauss avant d'avoir simplifié par le PGCD donnerait de fausses solutions (et en oublierait).

Réponse. $(x; y) = (1 + 3k; 1 - 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 7 - De la congruence à l'équation

a) Par définition de la congruence :

- $9x \equiv 6 \pmod{15}$ signifie $15 \mid (9x - 6)$, c'est-à-dire qu'il existe un entier y tel que $9x - 6 = 15y$.
- Autrement dit $9x - 15y = 6$: les deux problèmes sont **équivalents**, la variable y étant le quotient.

b) $\text{pgcd}(9; 15) = 3$ et $3 \mid 6$: il y a des solutions. On divise par 3 :

- $3x - 5y = 2$.

- Solution particulière : $x = 4, y = 2$ ($12 - 10 = 2$) ✓.
- $3(x - 4) = 5(y - 2)$; comme $\text{pgcd}(3; 5) = 1$, Gauss donne $5 \mid (x - 4) : x = 4 + 5k$, puis $y = 2 + 3k$.
- Vérification : $3(4 + 5k) - 5(2 + 3k) = 12 + 15k - 10 - 15k = 2$ ✓.

Retour à la congruence. Les solutions sont $x \equiv 4 \pmod{5}$.

- Modulo 15, cela fait trois classes : $x \equiv 4, x \equiv 9$ ou $x \equiv 14 \pmod{15}$.
- Contrôle : $9 \times 14 = 126 = 15 \times 8 + 6$ ✓.

Réponse. $x = 4 + 5k$ ($y = 2 + 3k$), soit $x \equiv 4, 9$ ou $14 \pmod{15}$.

Correction de l'exercice 8 - Des solutions positives seulement

On cherche les couples d'entiers **naturels** $(x; y)$ tels que $7x + 11y = 100$.

Étape 1 : solution particulière. $\text{pgcd}(7; 11) = 1$ donc il y a des solutions dans $\mathbb{Z}$.

- On travaille modulo 11 : $7x \equiv 100 \pmod{11}$, et $100 = 99 + 1 \equiv 1$.
- Inverse de 7 modulo 11 : $7 \times 8 = 56 = 55 + 1 \equiv 1$, donc $7^{-1} \equiv 8$.
- $x \equiv 8 \times 1 = 8 \pmod{11}$.

Étape 2 : solutions générales. $x = 8 + 11k$, et alors $11y = 100 - 7(8 + 11k) = 44 - 77k$, donc $y = 4 - 7k$.

Étape 3 : les contraintes.

- $x \geq 0$ donne $8 + 11k \geq 0$, soit $k \geq -\frac{8}{11}$, donc $k \geq 0$.
- $y \geq 0$ donne $4 - 7k \geq 0$, soit $k \leq \frac{4}{7}$, donc $k \leq 0$.
- Il ne reste que $k = 0 : (x; y) = (8; 4)$.

Conclusion. Une seule façon : 8 pièces de 7 centimes et 4 pièces de 11 centimes.

- Vérification : $56 + 44 = 100$ ✓.

Réponse. Une seule façon : 8 pièces de 7 et 4 pièces de 11.

Correction de l'exercice 9 - Billets de 20 et 50 euros

On cherche les entiers naturels x (billets de 20) et y (billets de 50) tels que $20x + 50y = 380$.

Étape 1 : simplifier. $\text{pgcd}(20; 50) = 10$ et $10 \mid 380$: on divise par 10.

- $2x + 5y = 38$.

Étape 2 : solution particulière. $y = 0$ donne $x = 19$: le couple $(19; 0)$ convient.

Étape 3 : solutions générales. $2(x - 19) = -5y$, et $\text{pgcd}(2; 5) = 1$ donc $5 \mid (x - 19)$:

- $x = 19 + 5k$ et $y = -2k$.

Étape 4 : contraintes. $x \geq 0$ et $y \geq 0$ imposent $k \leq 0$ et $19 + 5k \geq 0$, soit $-3 \leq k \leq 0$.

k	0	-1	-2	-3
Billets de 20 €	19	14	9	4
Billets de 50 €	0	2	4	6
Total	380	380	380	380

- **Quatre compositions** sont possibles ; la plus économe en billets est 4 billets de 20 € et 6 de 50 € (soit 10 billets).

Réponse. (19 ; 0), (14 ; 2), (9 ; 4) et (4 ; 6).

Correction de l'exercice 10 - Conditionner en cartons

a) On cherche les entiers naturels x (cartons de 12) et y (cartons de 20) tels que $12x + 20y = 236$.

- $\text{pgcd}(12; 20) = 4$ et $236 = 4 \times 59$: on divise par 4 pour obtenir $3x + 5y = 59$.
- Modulo 5 : $3x \equiv 59 \equiv 4 \pmod{5}$. L'inverse de 3 modulo 5 est 2 ($6 \equiv 1$), donc $x \equiv 2 \times 4 = 8 \equiv 3 \pmod{5}$.
- $x = 3 + 5k$, et $5y = 59 - 3(3 + 5k) = 50 - 15k$, donc $y = 10 - 3k$.
- Contraintes : $x \geq 0$ donne $k \geq 0$; $y \geq 0$ donne $k \leq \frac{10}{3}$, donc $k \leq 3$.

k	0	1	2	3
Cartons de 12	3	8	13	18
Cartons de 20	10	7	4	1
Nombre total	13	15	17	19

- Vérification de la première : $3 \times 12 + 10 \times 20 = 36 + 200 = 236 \checkmark$.

b) Le total de cartons vaut $x + y = 13 + 2k$: il est **minimal pour** $k = 0$.

- La meilleure répartition est donc 3 cartons de 12 et 10 cartons de 20, soit 13 cartons.
- C'est logique : à nombre de pièces fixé, on minimise le nombre de contenants en privilégiant les plus gros.

Réponse. a) (3 ; 10), (8 ; 7), (13 ; 4), (18 ; 1) · b) 3 et 10, soit 13 cartons.

Correction de l'exercice 11 - Les montants impossibles

a) On cherche les entiers n pour lesquels $3x + 5y = n$ admet une solution en entiers **naturels**. On teste les petites valeurs :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Payable ?	non	non	3	non	5	3 + 3	non	3 + 5	3 × 3	5 + 5	3 + 3 + 5

- Les montants impossibles sont 1, 2, 4 et 7 euros.

b) Montrons que tout $n \geq 8$ convient, en raisonnant sur le reste de n modulo 3.

- **Si** $n \equiv 0 \pmod{3}$: $n = 3q$, on paie avec q jetons de 3 €.
- **Si** $n \equiv 2 \pmod{3}$: $n - 5 \equiv 0 \pmod{3}$ et $n - 5 \geq 3 > 0$, donc $n - 5$ est payable en jetons de 3 € : on ajoute un jeton de 5 €.
- **Si** $n \equiv 1 \pmod{3}$: le plus petit tel montant supérieur à 8 est $n = 10$, donc $n \geq 10$. Alors $n - 10 \geq 0$ et $n - 10 \equiv 0 \pmod{3}$: on paie avec deux jetons de 5 € et $\frac{n-10}{3}$ jetons de 3 €.
- **Conclusion** : tout montant $n \geq 8$ est payable, et 7 est le plus grand montant impossible.
- Ce nombre $7 = 3 \times 5 - 3 - 5$ porte un nom : c'est le **nombre de Frobenius** du couple (3 ; 5).

Réponse. a) 1, 2, 4 et 7 euros · b) tout $n \geq 8$ est payable.

Correction de l'exercice 12 - Peser avec deux masses

Traduction. Poser une masse sur le plateau de l'objet revient à la compter **négativement** : on cherche donc des entiers **relatifs** x et y tels que

$$7x + 11y = 1$$

- $\text{pgcd}(7; 11) = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, une telle écriture existe.
- $11 = 7 + 4$; $7 = 4 + 3$; $4 = 3 + 1$. Remontée :
 $1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \times 4 - 7 = 2(11 - 7) - 7 = 2 \times 11 - 3 \times 7$.
- Vérification : $22 - 21 = 1$ ✓.

Lecture concrète. $x = -3$ et $y = 2$:

- on place l'objet **et** trois masses de 7 g sur un plateau ($1 + 21 = 22$ g) ;
- on place deux masses de 11 g sur l'autre plateau (22 g) ;
- l'équilibre prouve que l'objet pèse $22 - 21 = 1$ g.
- **Généralisation** : avec des masses de a g et b g posées des deux côtés, on peut peser exactement les multiples de $\text{pgcd}(a; b)$, et eux seuls.

Réponse. $2 \times 11 - 3 \times 7 = 1$: objet + trois masses de 7 g d'un côté, deux masses de 11 g de l'autre.

Correction de l'exercice 13 - Points entiers d'une droite

a) $\text{pgcd}(11; 8) = 1$ divise 200 : il y a des points entiers.

- Solution particulière : $x = 0$ donne $8y = 200$, soit $y = 25$. Le point $(0; 25)$ convient.
- $11(x - 0) = -8(y - 25)$, et $\text{pgcd}(11; 8) = 1$: d'après Gauss, $8 \mid x$, donc $x = 8k$.
- En reportant : $11 \times 8k = -8(y - 25)$, donc $y = 25 - 11k$.
- **Les points entiers de (D) sont les $M_k(8k; 25 - 11k)$, $k \in \mathbb{Z}$.**
- **Lecture géométrique** : on passe d'un point entier au suivant en ajoutant le vecteur $\vec{u}(8; -11)$ — ils sont régulièrement espacés sur la droite.

b) On impose $8k \geq 0$ et $25 - 11k \geq 0$:

- $k \geq 0$ et $k \leq \frac{25}{11} \approx 2,27$, donc $k \in \{0; 1; 2\}$.
- Les points sont $(0; 25)$, $(8; 14)$ et $(16; 3)$.
- Vérification du dernier : $11 \times 16 + 8 \times 3 = 176 + 24 = 200$ ✓.

Réponse. a) $(8k; 25 - 11k)$, $k \in \mathbb{Z}$ · b) trois points : $(0; 25)$, $(8; 14)$, $(16; 3)$.

Correction de l'exercice 14 - Deux contraintes à la fois

On cherche les entiers naturels x (ballons) et y (maillots) tels que $15x + 4y = 203$, avec $x \geq 2$.

Étape 1 : existence. $\text{pgcd}(15; 4) = 1$ divise 203 ✓.

Étape 2 : solution particulière. Modulo 4 : $15x \equiv 203$, soit $3x \equiv 3 \pmod{4}$ (car $15 \equiv 3$ et $203 = 200 + 3 \equiv 3$).

- 3 est son propre inverse modulo 4 ($9 \equiv 1$), donc $x \equiv 3 \times 3 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$.
- Pour $x = 1$: $4y = 203 - 15 = 188$, donc $y = 47$. Le couple $(1; 47)$ est solution.

Étape 3 : solutions générales. $x = 1 + 4k$ et $y = 47 - 15k$.

Étape 4 : contraintes.

- $y \geq 0$ donne $k \leq \frac{47}{15} \approx 3,13$, donc $k \leq 3$.

— $x \geq 2$ donne $1 + 4k \geq 2$, soit $k \geq 1$ (car k est entier).

k	1	2	3
Ballons	5	9	13
Maillots	32	17	2
Total	203 €	203 €	203 €

— Vérification pour $k = 3$: $15 \times 13 + 4 \times 2 = 195 + 8 = 203$ ✓.

Réponse. (5 ; 32), (9 ; 17) et (13 ; 2).

Correction de l'exercice 15 - Bilan : trois équations

a) $\text{pgcd}(15; 4) = 1$ divise 3 : il y a des solutions.

— Solution particulière : $x = 1$, $y = -3$ ($15 - 12 = 3$) ✓.

— $15(x - 1) = -4(y + 3)$, et $\text{pgcd}(15; 4) = 1$: Gauss donne $4 \mid (x - 1)$, donc $x = 1 + 4k$ et $y = -3 - 15k$.

— Vérification : $15(1 + 4k) + 4(-3 - 15k) = 15 + 60k - 12 - 60k = 3$ ✓.

b) $\text{pgcd}(6; 9) = 3$ et $3 \mid 15$: on divise par 3.

— $2x + 3y = 5$, dont une solution évidente est (1 ; 1).

— $2(x - 1) = -3(y - 1)$ donne, par Gauss, $x = 1 + 3k$ et $y = 1 - 2k$.

— Vérification : $6(1 + 3k) + 9(1 - 2k) = 6 + 18k + 9 - 18k = 15$ ✓.

c) On cherche les entiers naturels x (sachets) et y (boîtes) avec $5x + 8y = 143$.

— Modulo 8 : $5x \equiv 143 \pmod{8}$, et $143 = 136 + 7 \equiv 7$. L'inverse de 5 modulo 8 est 5 ($25 \equiv 1$), donc $x \equiv 5 \times 7 = 35 \equiv 3 \pmod{8}$.

— $x = 3 + 8k$ et $8y = 143 - 5(3 + 8k) = 128 - 40k$, donc $y = 16 - 5k$.

— Contraintes : $k \geq 0$ et $16 - 5k \geq 0$, soit $k \leq 3$.

k	0	1	2	3
Sachets de 5	3	11	19	27
Boîtes de 8	16	11	6	1

— Vérification pour $k = 2$: $5 \times 19 + 8 \times 6 = 95 + 48 = 143$ ✓.

Réponse. a) $(1 + 4k; -3 - 15k)$ · b) $(1 + 3k; 1 - 2k)$ · c) (3 ; 16), (11 ; 11), (19 ; 6), (27 ; 1).