Plaquette 4 – Équations diophantiennes ax + by = c

PGCD, théorème de Bézout, Gauss — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthode de résolution de $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$.

— **Existence** : l'équation admet des solutions **si et seulement si** $d = \text{pgcd}(a\,;b)$ divise c. Sinon, on conclut immédiatement : aucune solution.

— **Simplification** : si $d > 1$ divise c, on divise toute l'équation par d pour se ramener au cas où a et b sont premiers entre eux.

— **Solution particulière** $(x_0\,;y_0)$: par lecture directe si les nombres sont petits, sinon par **remontée de l'algorithme d'Euclide** (identité de Bézout $au + bv = 1$, puis multiplication par c).

— **Solutions générales** : on soustrait $ax_0 + by_0 = c$ de $ax + by = c$, ce qui donne $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$. Comme $\text{pgcd}(a\,;b) = 1$, le **théorème de Gauss** donne $b \mid (x - x_0)$, d'où

$$x = x_0 + bk \qquad y = y_0 - ak \qquad k \in \mathbb{Z}$$

— **Vérification finale** : on remplace dans l'équation, le paramètre k doit disparaître.

— **Contraintes du problème** : pour des entiers naturels, on résout le système $x \geq 0$ et $y \geq 0$, qui encadre k ; le nombre de solutions est alors fini.

— **Lecture géométrique** : les solutions sont les **points à coordonnées entières** de la droite d'équation $ax + by = c$, régulièrement espacés du vecteur $(b\,;-a)$.

Correction de l'exercice 1 – Existe-t-il des solutions ?

Le critère du cours : $ax + by = c$ a des solutions **si et seulement si** $\text{pgcd}(a\,;b)$ divise c.

a) $\text{pgcd}(12\,;18) = 6$, et $21 = 6 \times 3 + 3$: 6 ne divise pas 21.

— **Aucune solution.** Justification directe : $12x + 18y = 6(2x + 3y)$ est toujours un multiple de 6, alors que 21 n'en est pas un.

b) $\text{pgcd}(12\,;18) = 6$ et $30 = 6 \times 5$: le critère est vérifié.

— **Il y a des solutions** (par exemple $x = 1$, $y = 1$: $12 + 18 = 30$ ✓).

c) $\text{pgcd}(4\,;6) = 2$, et 9 est impair : 2 ne divise pas 9.

— **Aucune solution** : $4x + 6y$ est toujours pair.

— **Le réflexe** : avant tout calcul, comparer le PGCD des coefficients au second membre. C'est une ligne de rédaction, et elle évite parfois toute une page inutile.

Réponse. a) non $(6 \nmid 21)$ · b) oui $(6 \mid 30)$ · c) non $(2 \nmid 9)$.

Correction de l'exercice 2 – Une solution particulière à l'œil

a) $\text{pgcd}(5\,;3) = 1$, et 1 divise 7 : l'équation admet des solutions.

b) On essaie de petites valeurs de x et on regarde si $7 - 5x$ est un multiple de 3 :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x	0	1	2
$7-5x$	7	2	-3
multiple de 3 ?	non	non	oui

— Pour $x=2$: $3y=-3$, donc $y=-1$.
— **Une solution particulière est** $(2\,;-1)$: $5\times 2+3\times(-1)=10-3=7$ ✓.
— **Conseil de méthode** : on fait varier la variable dont le coefficient est le plus grand, il y a moins d'essais à faire. Trois essais suffisent toujours ici, puisque $7-5x$ parcourt les trois restes modulo 3.

Réponse. $(x_0\,;y_0)=(2\,;-1)$.

Correction de l'exercice 3 – Résolution complète

Étape 1 : une solution particulière. $(x_0\,;y_0)=(2\,;-1)$, car $10-3=7$.

Étape 2 : on soustrait les deux égalités.

— $5x+3y=7$ et $5\times 2+3\times(-1)=7$.
— Par différence : $5(x-2)+3(y+1)=0$, soit $5(x-2)=-3(y+1)$.

Étape 3 : le théorème de Gauss.

— 3 divise $5(x-2)$ et $\text{pgcd}(3\,;5)=1$, donc 3 divise $x-2$: $x=2+3k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
— On reporte : $5\times 3k=-3(y+1)$, donc $5k=-(y+1)$ et $y=-1-5k$.

Étape 4 : vérification (le paramètre doit disparaître).

— $5(2+3k)+3(-1-5k)=10+15k-3-15k=7$ ✓.
— **Conclusion** :

$$S=\{(2+3k\,;-1-5k),\ k\in\mathbb{Z}\}$$

— Contrôle pour $k=1$: $(5\,;-6)$, et $25-18=7$ ✓.

Réponse. $(x\,;y)=(2+3k\,;-1-5k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 4 – Passer par Bézout

Les coefficients sont trop grands pour deviner : on calcule une identité de Bézout.

Étape 1 : algorithme d'Euclide.

— $40=17\times 2+6$; $17=6\times 2+5$; $6=5+1$.
— Le PGCD vaut 1, l'équation a donc des solutions.

Étape 2 : remontée.

— $1=6-5=6-(17-2\times 6)=3\times 6-17$.
— $6=40-2\times 17$ donne

$$1=3(40-2\times 17)-17=3\times 40-7\times 17$$

— Vérification : $120-119=1$ ✓. Une solution particulière est donc $(x_0\,;y_0)=(-7\,;3)$.

Étape 3 : solutions générales.

— $17(x+7)+40(y-3)=0$, soit $17(x+7)=-40(y-3)$.
— 40 divise $17(x+7)$ avec $\text{pgcd}(17\,;40)=1$: d'après Gauss, $40\mid(x+7)$, donc $x=-7+40k$.
— En reportant : $y=3-17k$.
— **Vérification** : $17(-7+40k)+40(3-17k)=-119+680k+120-680k=1$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $(x\,;y) = (-7+40k\,;3-17k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 5 – Un second membre différent de 1

Étape 1 : Bézout pour 23 **et** 17**.**

— $23 = 17 + 6$; $17 = 6\times 2 + 5$; $6 = 5 + 1$.

— Remontée :

$$1 = 6 - 5 = 6 - (17 - 2\times 6) = 3\times 6 - 17 = 3(23-17) - 17 = 3\times 23 - 4\times 17$$

— Vérification : $69 - 68 = 1$ ✓.

Étape 2 : on multiplie par 5 (c'est le second membre visé).

— $23\times 15 - 17\times 20 = 5$, donc $(x_0\,;y_0) = (15\,;-20)$ est solution.

Étape 3 : solutions générales.

— $23(x-15) = -17(y+20)$, et $\text{pgcd}(23\,;17) = 1$: d'après Gauss, $17 \mid (x-15)$.

— $x = 15 + 17k$ et $y = -20 - 23k$, $k \in \mathbb{Z}$.

— **Vérification** : $23(15+17k) + 17(-20-23k) = 345 + 391k - 340 - 391k = 5$ ✓.

Autre écriture de la même famille. Pour $k = -1$ on obtient $(-2\,;3)$, beaucoup plus lisible :

— $23\times(-2) + 17\times 3 = -46 + 51 = 5$ ✓, et la famille s'écrit aussi $(-2+17k\,;3-23k)$.

— Deux corrigés peuvent donc présenter des solutions particulières différentes **sans se contredire**.

Réponse. $(x\,;y) = (15+17k\,;-20-23k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 6 – Quand le PGCD ne vaut pas 1

Étape 1 : existence et simplification.

— $\text{pgcd}(12\,;18) = 6$ et $6 \mid 30$: il y a des solutions.

— On divise **toute** l'équation par 6 : $2x + 3y = 5$.

— Les coefficients sont maintenant premiers entre eux : c'est indispensable avant d'appliquer Gauss.

Étape 2 : solution particulière. $x = 1$, $y = 1$ convient $(2 + 3 = 5)$.

Étape 3 : solutions générales.

— $2(x-1) = -3(y-1)$, et $\text{pgcd}(2\,;3) = 1$: $3 \mid (x-1)$, donc $x = 1 + 3k$.

— En reportant : $2\times 3k = -3(y-1)$, donc $y = 1 - 2k$.

— **Vérification dans l'équation de départ** :
$12(1+3k) + 18(1-2k) = 12 + 36k + 18 - 36k = 30$ ✓.

— **Piège à éviter** : appliquer Gauss avant d'avoir simplifié par le PGCD donnerait de fausses solutions (et en oublierait).

Réponse. $(x\,;y) = (1+3k\,;1-2k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 7 – De la congruence à l'équation

a) Par définition de la congruence :

— $9x \equiv 6 \pmod{15}$ signifie $15 \mid (9x-6)$, c'est-à-dire qu'il existe un entier y tel que $9x - 6 = 15y$.

— Autrement dit $9x - 15y = 6$: les deux problèmes sont **équivalents**, la variable y étant le quotient.

b) $\text{pgcd}(9\,;15) = 3$ et $3 \mid 6$: il y a des solutions. On divise par 3 :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $3x - 5y = 2$.
— Solution particulière : $x = 4$, $y = 2$ $(12 - 10 = 2)$ ✓.
— $3(x - 4) = 5(y - 2)$; comme $\text{pgcd}(3\,;5) = 1$, Gauss donne $5 \mid (x - 4)$: $x = 4 + 5k$, puis $y = 2 + 3k$.
— Vérification : $3(4 + 5k) - 5(2 + 3k) = 12 + 15k - 10 - 15k = 2$ ✓.

Retour à la congruence. Les solutions sont $x \equiv 4 \pmod 5$.

— Modulo 15, cela fait trois classes : $x \equiv 4$, $x \equiv 9$ ou $x \equiv 14 \pmod{15}$.
— Contrôle : $9 \times 14 = 126 = 15 \times 8 + 6$ ✓.

Réponse. $x = 4 + 5k$ $(y = 2 + 3k)$, soit $x \equiv 4$, 9 ou $14 \pmod{15}$.

Correction de l’exercice 8 – Des solutions positives seulement

On cherche les couples d’entiers **naturels** $(x\,;y)$ tels que $7x + 11y = 100$.

Étape 1 : solution particulière. $\text{pgcd}(7\,;11) = 1$ donc il y a des solutions dans $\mathbb{Z}$.

— On travaille modulo 11 : $7x \equiv 100 \pmod{11}$, et $100 = 99 + 1 \equiv 1$.
— Inverse de 7 modulo 11 : $7 \times 8 = 56 = 55 + 1 \equiv 1$, donc $7^{-1} \equiv 8$.
— $x \equiv 8 \times 1 = 8 \pmod{11}$.

Étape 2 : solutions générales. $x = 8 + 11k$, et alors $11y = 100 - 7(8 + 11k) = 44 - 77k$, donc $y = 4 - 7k$.

Étape 3 : les contraintes.

— $x \geq 0$ donne $8 + 11k \geq 0$, soit $k \geq -\dfrac{8}{11}$, donc $k \geq 0$.
— $y \geq 0$ donne $4 - 7k \geq 0$, soit $k \leq \dfrac{4}{7}$, donc $k \leq 0$.
— Il ne reste que $k = 0$:

$$(x\,;y) = (8\,;4)$$

Conclusion. Une seule façon : 8 pièces de 7 centimes et 4 pièces de 11 centimes.

— Vérification : $56 + 44 = 100$ ✓.

Réponse. Une seule façon : 8 pièces de 7 et 4 pièces de 11.

Correction de l’exercice 9 – Billets de 20 et 50 euros

On cherche les entiers naturels x (billets de 20) et y (billets de 50) tels que $20x + 50y = 380$.

Étape 1 : simplifier. $\text{pgcd}(20\,;50) = 10$ et $10 \mid 380$: on divise par 10.

— $2x + 5y = 38$.

Étape 2 : solution particulière. $y = 0$ donne $x = 19$: le couple $(19\,;0)$ convient.

Étape 3 : solutions générales. $2(x - 19) = -5y$, et $\text{pgcd}(2\,;5) = 1$ donc $5 \mid (x - 19)$:

— $x = 19 + 5k$ et $y = -2k$.

Étape 4 : contraintes. $x \geq 0$ et $y \geq 0$ imposent $k \leq 0$ et $19 + 5k \geq 0$, soit $-3 \leq k \leq 0$.

k	0	-1	-2	-3
Billets de 20 €	19	14	9	4
Billets de 50 €	0	2	4	6
Total	380	380	380	380

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Quatre compositions** sont possibles ; la plus économe en billets est 4 billets de 20 € et 6 de 50 € (soit 10 billets).

Réponse. (19 ; 0), (14 ; 2), (9 ; 4) et (4 ; 6).

Correction de l'exercice 10 – Conditionner en cartons

a) On cherche les entiers naturels x (cartons de 12) et y (cartons de 20) tels que $12x + 20y = 236$.

— $\text{pgcd}(12\,;20) = 4$ et $236 = 4 \times 59$: on divise par 4 pour obtenir $3x + 5y = 59$.

— Modulo 5 : $3x \equiv 59 \equiv 4 \pmod 5$. L'inverse de 3 modulo 5 est 2 ($6 \equiv 1$), donc $x \equiv 2 \times 4 = 8 \equiv 3 \pmod 5$.

— $x = 3 + 5k$, et $5y = 59 - 3(3 + 5k) = 50 - 15k$, donc $y = 10 - 3k$.

— Contraintes : $x \geq 0$ donne $k \geq 0$; $y \geq 0$ donne $k \leq \dfrac{10}{3}$, donc $k \leq 3$.

k	0	1	2	3
Cartons de 12	3	8	13	18
Cartons de 20	10	7	4	1
Nombre total	13	15	17	19

— Vérification de la première : $3 \times 12 + 10 \times 20 = 36 + 200 = 236$ ✓.

b) Le total de cartons vaut $x + y = 13 + 2k$: il est **minimal pour** $k = 0$.

— La meilleure répartition est donc 3 cartons de 12 et 10 cartons de 20, soit 13 cartons.

— C'est logique : à nombre de pièces fixé, on minimise le nombre de contenants en privilégiant les plus gros.

Réponse. a) (3 ; 10), (8 ; 7), (13 ; 4), (18 ; 1) · b) 3 et 10, soit 13 cartons.

Correction de l'exercice 11 – Les montants impossibles

a) On cherche les entiers n pour lesquels $3x + 5y = n$ admet une solution en entiers **naturels**. On teste les petites valeurs :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Payable ?	non	non	3	non	5	3 + 3	non	3 + 5	3 × 3	5 + 5	3 + 3 + 5

— Les montants impossibles sont 1, 2, 4 et 7 euros.

b) Montrons que tout $n \geq 8$ convient, en raisonnant sur le reste de n modulo 3.

— **Si** $n \equiv 0 \pmod 3$: $n = 3q$, on paie avec q jetons de 3 €.

— **Si** $n \equiv 2 \pmod 3$: $n - 5 \equiv 0 \pmod 3$ et $n - 5 \geq 3 > 0$, donc $n - 5$ est payable en jetons de 3 € : on ajoute un jeton de 5 €.

— **Si** $n \equiv 1 \pmod 3$: le plus petit tel montant supérieur à 8 est $n = 10$, donc $n \geq 10$. Alors $n - 10 \geq 0$ et $n - 10 \equiv 0 \pmod 3$: on paie avec deux jetons de 5 € et $\dfrac{n-10}{3}$ jetons de 3 €.

— **Conclusion** : tout montant $n \geq 8$ est payable, et 7 est le plus grand montant impossible.

— Ce nombre $7 = 3 \times 5 - 3 - 5$ porte un nom : c'est le **nombre de Frobenius** du couple (3 ; 5).

Réponse. a) 1, 2, 4 et 7 euros · b) tout $n \geq 8$ est payable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Peser avec deux masses

Traduction. Poser une masse sur le plateau de l'objet revient à la compter **négativement** : on cherche donc des entiers **relatifs** x et y tels que

$$7x + 11y = 1$$

— $\text{pgcd}(7\,;11) = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, une telle écriture existe.
— $11 = 7 + 4$; $7 = 4 + 3$; $4 = 3 + 1$. Remontée :
$1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \times 4 - 7 = 2(11 - 7) - 7 = 2 \times 11 - 3 \times 7$.
— Vérification : $22 - 21 = 1$ ✓.

Lecture concrète. $x = -3$ et $y = 2$:

— on place l'objet **et** trois masses de 7 g sur un plateau ($1 + 21 = 22$ g) ;
— on place deux masses de 11 g sur l'autre plateau (22 g) ;
— l'équilibre prouve que l'objet pèse $22 - 21 = 1$ g.
— **Généralisation** : avec des masses de a g et b g posées des deux côtés, on peut peser exactement les multiples de $\text{pgcd}(a\,;b)$, et eux seuls.

Réponse. $2 \times 11 - 3 \times 7 = 1$: objet + trois masses de 7 g d'un côté, deux masses de 11 g de l'autre.

Correction de l'exercice 13 – Points entiers d'une droite

a) $\text{pgcd}(11\,;8) = 1$ divise 200 : il y a des points entiers.

— Solution particulière : $x = 0$ donne $8y = 200$, soit $y = 25$. Le point $(0\,;25)$ convient.
— $11(x - 0) = -8(y - 25)$, et $\text{pgcd}(11\,;8) = 1$: d'après Gauss, $8 \mid x$, donc $x = 8k$.
— En reportant : $11 \times 8k = -8(y - 25)$, donc $y = 25 - 11k$.
— **Les points entiers de** (D) **sont les** $M_k(8k\,;25 - 11k)$**,** $k \in \mathbb{Z}$**.**
— **Lecture géométrique** : on passe d'un point entier au suivant en ajoutant le vecteur $\vec{u}(8\,;-11)$ — ils sont régulièrement espacés sur la droite.

b) On impose $8k \geq 0$ et $25 - 11k \geq 0$:

— $k \geq 0$ et $k \leq \dfrac{25}{11} \approx 2,27$, donc $k \in \{0\,;1\,;2\}$.
— Les points sont $(0\,;25)$, $(8\,;14)$ et $(16\,;3)$.
— Vérification du dernier : $11 \times 16 + 8 \times 3 = 176 + 24 = 200$ ✓.

Réponse. a) $(8k\,;25 - 11k)$, $k \in \mathbb{Z}$ · b) trois points : $(0\,;25)$, $(8\,;14)$, $(16\,;3)$.

Correction de l'exercice 14 – Deux contraintes à la fois

On cherche les entiers naturels x (ballons) et y (maillots) tels que $15x + 4y = 203$, avec $x \geq 2$.

Étape 1 : existence. $\text{pgcd}(15\,;4) = 1$ divise 203 ✓.

Étape 2 : solution particulière. Modulo 4 : $15x \equiv 203$, soit $3x \equiv 3 \pmod 4$ (car $15 \equiv 3$ et $203 = 200 + 3 \equiv 3$).

— 3 est son propre inverse modulo 4 ($9 \equiv 1$), donc $x \equiv 3 \times 3 = 9 \equiv 1 \pmod 4$.
— Pour $x = 1$: $4y = 203 - 15 = 188$, donc $y = 47$. Le couple $(1\,;47)$ est solution.

Étape 3 : solutions générales. $x = 1 + 4k$ et $y = 47 - 15k$.

Étape 4 : contraintes.

— $y \geq 0$ donne $k \leq \dfrac{47}{15} \approx 3,13$, donc $k \leq 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $x \geq 2$ donne $1 + 4k \geq 2$, soit $k \geq 1$ (car k est entier).

k	1	2	3
Ballons	5	9	13
Maillots	32	17	2
Total	203 €	203 €	203 €

— Vérification pour $k = 3$: $15 \times 13 + 4 \times 2 = 195 + 8 = 203$ ✓.

Réponse. $(5\,;32)$, $(9\,;17)$ et $(13\,;2)$.

Correction de l’exercice 15 – Bilan : trois équations

a) $\text{pgcd}(15\,;4) = 1$ divise 3 : il y a des solutions.

— Solution particulière : $x = 1$, $y = -3$ $(15 - 12 = 3)$ ✓.

— $15(x-1) = -4(y+3)$, et $\text{pgcd}(15\,;4) = 1$: Gauss donne $4 \mid (x-1)$, donc $x = 1 + 4k$ et $y = -3 - 15k$.

— Vérification : $15(1 + 4k) + 4(-3 - 15k) = 15 + 60k - 12 - 60k = 3$ ✓.

b) $\text{pgcd}(6\,;9) = 3$ et $3 \mid 15$: on divise par 3.

— $2x + 3y = 5$, dont une solution évidente est $(1\,;1)$.

— $2(x-1) = -3(y-1)$ donne, par Gauss, $x = 1 + 3k$ et $y = 1 - 2k$.

— Vérification : $6(1 + 3k) + 9(1 - 2k) = 6 + 18k + 9 - 18k = 15$ ✓.

c) On cherche les entiers naturels x (sachets) et y (boîtes) avec $5x + 8y = 143$.

— Modulo 8 : $5x \equiv 143 \pmod 8$, et $143 = 136 + 7 \equiv 7$. L’inverse de 5 modulo 8 est 5 ($25 \equiv 1$), donc $x \equiv 5 \times 7 = 35 \equiv 3 \pmod 8$.

— $x = 3 + 8k$ et $8y = 143 - 5(3 + 8k) = 128 - 40k$, donc $y = 16 - 5k$.

— Contraintes : $k \geq 0$ et $16 - 5k \geq 0$, soit $k \leq 3$.

k	0	1	2	3
Sachets de 5	3	11	19	27
Boîtes de 8	16	11	6	1

— Vérification pour $k = 2$: $5 \times 19 + 8 \times 6 = 95 + 48 = 143$ ✓.

Réponse. a) $(1 + 4k\,; -3 - 15k)$ · b) $(1 + 3k\,; 1 - 2k)$ · c) $(3\,;16)$, $(11\,;11)$, $(19\,;6)$, $(27\,;1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).