Plaquette 2 – PGCD, PPCM et algorithme d'Euclide

PGCD, théorème de Bézout, Gauss — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour le PGCD et le PPCM.

— **Définition** : pgcd$(a\,;b)$ est le plus grand entier qui divise à la fois a et b. Tout diviseur commun de a et b divise leur PGCD.

— **Algorithme d'Euclide** : si r est le reste de a par b, alors

$$\text{pgcd}(a\,;b) = \text{pgcd}(b\,;r)$$

On répète jusqu'à un reste nul : le PGCD est le **dernier reste non nul**.

— **Combinaison linéaire** : pgcd$(a\,;b)$ divise $au + bv$ pour tous entiers u, v. C'est l'outil pour majorer un PGCD dépendant de n.

— a et b sont **premiers entre eux** lorsque pgcd$(a\,;b) = 1$.

— **Fraction irréductible** : on divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.

— **Relation PGCD-PPCM**, pour a et b entiers strictement positifs :

$$\text{pgcd}(a\,;b) \times \text{ppcm}(a\,;b) = a \times b$$

— **Forme réduite** : si $d = \text{pgcd}(a\,;b)$, on écrit $a = da'$ et $b = db'$ avec pgcd$(a'\,;b') = 1$. C'est le point de départ de tous les problèmes « connaissant le PGCD… ».

— **Reconnaître le bon outil** : découper, partager, répartir en parts égales → **PGCD** ; se retrouver, coïncider, revenir ensemble → **PPCM**.

Correction de l'exercice 1 – Algorithme d'Euclide

On divise le plus grand par le plus petit, puis on recommence avec le diviseur et le reste.

Division	Reste
$4\,539 = 1\,958 \times 2 + 623$	623
$1\,958 = 623 \times 3 + 89$	89
$623 = 89 \times 7 + 0$	0

— Le dernier reste non nul est 89, donc

$$\text{pgcd}(4\,539\,;1\,958) = 89$$

— **Vérification** : $4\,539 = 89 \times 51$ et $1\,958 = 89 \times 22$ ✓, et pgcd$(51\,;22) = 1$ puisque $51 = 3 \times 17$ et $22 = 2 \times 11$.

— **Pourquoi l'algorithme fonctionne** : tout diviseur commun de a et b divise $a - bq = r$, et réciproquement. Les couples successifs ont donc exactement les mêmes diviseurs communs.

Réponse. pgcd$(4\,539\,;1\,958) = 89$.

Correction de l'exercice 2 – PGCD de trois entiers

On procède **deux par deux** : le PGCD de trois nombres est le PGCD des deux premiers, puis avec le troisième.

— $252 = 168 \times 1 + 84$; $168 = 84 \times 2 + 0$, donc pgcd$(168\,;252) = 84$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $420 = 84 \times 5 + 0$, donc 84 divise 420 : $\text{pgcd}(84\,;420) = 84$.
— **Conclusion** : $\text{pgcd}(168\,;252\,;420) = 84$.

Contrôle par les décompositions.

— $168 = 2^3 \times 3 \times 7$, $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$, $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$.
— On garde chaque facteur premier à sa **plus petite** puissance : $2^2 \times 3 \times 7 = 84$ ✓.

Réponse. $\text{pgcd}(168\,;252\,;420) = 84$.

Correction de l’exercice 3 – Premiers entre eux ou non

a) $64 = 35 \times 1 + 29$; $35 = 29 + 6$; $29 = 6 \times 4 + 5$; $6 = 5 + 1$; $5 = 1 \times 5 + 0$.

— Le PGCD vaut 1 : 35 et 64 sont **premiers entre eux**.
— Contrôle rapide : $35 = 5 \times 7$ et $64 = 2^6$ n’ont aucun facteur premier commun.

b) $143 = 91 + 52$; $91 = 52 + 39$; $52 = 39 + 13$; $39 = 13 \times 3 + 0$.

— $\text{pgcd}(91\,;143) = 13$: ils ne sont **pas** premiers entre eux ($91 = 7 \times 13$, $143 = 11 \times 13$).

c) $391 = 221 + 170$; $221 = 170 + 51$; $170 = 51 \times 3 + 17$; $51 = 17 \times 3 + 0$.

— $\text{pgcd}(221\,;391) = 17$: pas premiers entre eux ($221 = 13 \times 17$, $391 = 17 \times 23$).
— **La leçon** : deux nombres « qui n’ont pas l’air » d’avoir un facteur commun peuvent en avoir un grand. L’algorithme tranche en trois lignes, là où chercher les diviseurs serait long.

Réponse. a) oui (1) · b) non (13) · c) non (17).

Correction de l’exercice 4 – Rendre une fraction irréductible

On calcule d’abord le PGCD du numérateur et du dénominateur.

— $5\,390 = 3\,234 \times 1 + 2\,156$
— $3\,234 = 2\,156 \times 1 + 1\,078$
— $2\,156 = 1\,078 \times 2 + 0$
— Le dernier reste non nul est 1 078 : $\text{pgcd}(3\,234\,;5\,390) = 1\,078$.

On divise les deux termes par ce PGCD :

— $3\,234 \div 1\,078 = 3$ et $5\,390 \div 1\,078 = 5$.

$$\frac{3\,234}{5\,390} = \frac{3}{5}$$

— **Vérification** : $1\,078 \times 3 = 3\,234$ ✓ et $1\,078 \times 5 = 5\,390$ ✓.
— La fraction obtenue est irréductible car $\text{pgcd}(3\,;5) = 1$ — c’est toujours le cas après division par le PGCD.

Réponse. $\dfrac{3\,234}{5\,390} = \dfrac{3}{5}$.

Correction de l’exercice 5 – Du PGCD au PPCM

a) Algorithme d’Euclide :

— $90 = 84 \times 1 + 6$; $84 = 6 \times 14 + 0$.
— Donc $\text{pgcd}(84\,;90) = 6$.

b) On utilise la relation du cours :

$$\text{pgcd}(a\,;b) \times \text{ppcm}(a\,;b) = a \times b$$

— Ici : $6 \times \text{ppcm}(84\,;90) = 84 \times 90 = 7\,560$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Donc ppcm$(84\,;90) = \dfrac{7\,560}{6} = 1\,260$.

— **Vérification** : $1\,260 = 84 \times 15$ ✓ et $1\,260 = 90 \times 14$ ✓.

— **Piège fréquent** : écrire directement ppcm $= a \times b$. C'est vrai **uniquement** si a et b sont premiers entre eux.

Réponse. a) 6 · b) 1 260.

Correction de l'exercice 6 – PPCM de trois nombres

« Se retrouver ensemble » : l'instant cherché est un multiple commun des trois périodes, donc leur **PPCM**.

— ppcm$(12\,;18)$: pgcd$(12\,;18) = 6$, donc ppcm $= \dfrac{12 \times 18}{6} = 36$.

— ppcm$(36\,;30)$: pgcd$(36\,;30) = 6$, donc ppcm $= \dfrac{36 \times 30}{6} = 180$.

— Le PPCM des trois périodes est donc 180 minutes, soit 3 heures.

Conclusion. Les trois bus se retrouveront à 9 h.

— **Vérification** : $180 = 12 \times 15 = 18 \times 10 = 30 \times 6$ ✓ — chaque ligne a bien effectué un nombre entier de rotations.

— **Le réflexe** : partager en parts égales → PGCD ; se retrouver → PPCM.

Réponse. ppcm$(12\,;18\,;30) = 180$ min = 3 h : à 9 h.

Correction de l'exercice 7 – PGCD d'entiers consécutifs

a) Soit d un diviseur commun de n et $n+1$.

— Par combinaison linéaire, d divise $(n+1) - n = 1$.

— Donc $d = 1$ (en ne gardant que les diviseurs positifs) : pgcd$(n\,;n+1) = 1$.

— **Conséquence utile** : deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux, donc $\dfrac{n}{n+1}$ est toujours irréductible.

b) Soit d un diviseur commun de $2n+1$ et $2n+3$.

— d divise la différence : $(2n+3) - (2n+1) = 2$, donc $d \in \{1\,;2\}$.

— Or $2n+1$ est **impair** : 2 ne peut pas le diviser.

— Donc $d = 1$: pgcd$(2n+1\,;2n+3) = 1$.

— Contrôle : $n = 7$ donne 15 et 17, premiers entre eux ✓.

Réponse. a) $d \mid 1$ · b) $d \mid 2$ et les deux nombres sont impairs, donc $d = 1$.

Correction de l'exercice 8 – Un PGCD qui dépend de n

a) d divise $n+3$ et $n+7$, donc il divise leur différence :

— $(n+7) - (n+3) = 4$, donc $d \mid 4$ et $d \in \{1\,;2\,;4\}$.

b) On discute selon la classe de n modulo 4 — c'est ce que suggère le nombre 4.

Cas	$n+3$	$n+7$	d
n pair	impair	impair	1
$n \equiv 1 \pmod 4$	multiple de 4	multiple de 4	4
$n \equiv 3 \pmod 4$	$\equiv 2 \pmod 4$	$\equiv 2 \pmod 4$	2

— Si n est pair, $n+3$ est impair : d est impair et divise 4, donc $d = 1$. Exemple $n = 6$: pgcd$(9\,;13) = 1$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Si $n \equiv 1 \pmod 4$, alors $n+3 \equiv 0$ et $n+7 \equiv 0 \pmod 4$: 4 divise les deux, donc $d = 4$. Exemple $n = 5$: $\text{pgcd}(8\,;12) = 4$ ✓.
— Si $n \equiv 3 \pmod 4$, les deux nombres sont pairs mais non multiples de 4 : $d = 2$. Exemple $n = 7$: $\text{pgcd}(10\,;14) = 2$ ✓.

Réponse. $d = 1$ si n est pair, $d = 4$ si $n \equiv 1 \pmod 4$, $d = 2$ si $n \equiv 3 \pmod 4$.

Correction de l'exercice 9 – Toujours premiers entre eux

On cherche une **combinaison linéaire** des deux expressions qui élimine n : c'est la technique standard.

— Soit d un diviseur commun de $3n+2$ et $5n+3$.
— d divise $5(3n+2) = 15n+10$ et $3(5n+3) = 15n+9$.
— Par différence, d divise $(15n+10)-(15n+9) = 1$.
— Donc $d = 1$: les deux nombres sont premiers entre eux, **quel que soit** n.

Lecture « Bézout ». On vient d'écrire explicitement

$$5 \times (3n+2) - 3 \times (5n+3) = 1$$

— C'est une **identité de Bézout** avec $u = 5$ et $v = -3$: d'après le théorème de Bézout, elle suffit à conclure.
— Contrôle : $n = 4$ donne 14 et 23, premiers entre eux ✓.

Réponse. $5(3n+2) - 3(5n+3) = 1$, donc pgcd = 1.

Correction de l'exercice 10 – Somme et PGCD imposés

Méthode de la forme réduite : si $\text{pgcd}(a\,;b) = 12$, on écrit $a = 12a'$ et $b = 12b'$ avec $\text{pgcd}(a'\,;b') = 1$.

— L'équation $a + b = 84$ devient $12a' + 12b' = 84$, soit $a' + b' = 7$.
— Avec $a' < b'$ et a', b' premiers entre eux, on liste les décompositions de 7 :

$(a'\,;b')$	$\text{pgcd}(a'\,;b')$	$(a\,;b)$
$(1\,;6)$	1 ✓	$(12\,;72)$
$(2\,;5)$	1 ✓	$(24\,;60)$
$(3\,;4)$	1 ✓	$(36\,;48)$

— Ici toutes les décompositions conviennent, car 7 est premier : deux nombres de somme 7 ne peuvent pas avoir de diviseur commun autre que 1.

Vérification sur un couple : $\text{pgcd}(24\,;60) = 12$ ✓ et $24 + 60 = 84$ ✓.

Réponse. $(12\,;72)$, $(24\,;60)$ et $(36\,;48)$.

Correction de l'exercice 11 – PGCD et PPCM imposés

On utilise la relation du cours puis la forme réduite.

— $a \times b = \text{pgcd} \times \text{ppcm} = 6 \times 180 = 1\,080$.
— On pose $a = 6a'$ et $b = 6b'$ avec $\text{pgcd}(a'\,;b') = 1$: alors $36a'b' = 1\,080$, donc $a'b' = 30$.
— On liste les couples $(a'\,;b')$ de produit 30, avec $a' \leq b'$ et premiers entre eux :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$(a' ; b')$	pgcd	$(a ; b)$
$(1 ; 30)$	1 ✓	$(6 ; 180)$
$(2 ; 15)$	1 ✓	$(12 ; 90)$
$(3 ; 10)$	1 ✓	$(18 ; 60)$
$(5 ; 6)$	1 ✓	$(30 ; 36)$

— Le couple $(a' ; b') = (6 ; 5)$ redonnerait le même couple à l'ordre près, et il n'y a pas d'autre décomposition de 30.

Vérification sur $(18 ; 60)$: pgcd = 6 ✓ et ppcm = $\frac{18 \times 60}{6} = 180$ ✓.

Réponse. $(6 ; 180)$, $(12 ; 90)$, $(18 ; 60)$ et $(30 ; 36)$.

Correction de l'exercice 12 – Carreler sans découper

a) « Sans découpe » signifie que le côté c (en cm) doit diviser 450 **et** 315 ; « les plus grandes possible » impose le PGCD.

— $450 = 315 \times 1 + 135$
— $315 = 135 \times 2 + 45$
— $135 = 45 \times 3 + 0$
— Donc $\text{pgcd}(450 ; 315) = 45$: les dalles mesurent 45 cm de côté.

b) On compte les dalles dans chaque direction :

— Longueur : $450 \div 45 = 10$ dalles.
— Largeur : $315 \div 45 = 7$ dalles.
— Total : $10 \times 7 = 70$ dalles.
— **Contrôle par les aires** : $4,50 \times 3,15 = 14,175$ m² et $70 \times 0,45^2 = 70 \times 0,2025 = 14,175$ m² ✓.

Réponse. a) 45 cm · b) 70 dalles (10×7).

Correction de l'exercice 13 – Composer des bouquets identiques

a) Le nombre de bouquets doit diviser 252 et 180 ; le maximum est leur PGCD.

— $252 = 180 \times 1 + 72$
— $180 = 72 \times 2 + 36$
— $72 = 36 \times 2 + 0$
— Donc $\text{pgcd}(252 ; 180) = 36$: au maximum 36 **bouquets**.

b) On répartit les fleurs :

— Roses : $252 \div 36 = 7$ par bouquet.
— Tulipes : $180 \div 36 = 5$ par bouquet.
— Chaque bouquet contient donc 7 roses et 5 tulipes, soit 12 fleurs.
— **Contrôle** : $36 \times 7 = 252$ ✓ et $36 \times 5 = 180$ ✓, toutes les fleurs sont utilisées.
— Remarque : $\text{pgcd}(7 ; 5) = 1$, ce qui confirme qu'on ne peut pas faire plus de bouquets.

Réponse. a) 36 bouquets · b) 7 roses et 5 tulipes chacun.

Correction de l'exercice 14 – Deux engrenages

a) Les marques se retrouvent quand le nombre de dents passées est un multiple commun de 24 et 36 : on cherche leur **PPCM**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— pgcd(24 ; 36) : $36 = 24 + 12$ et $24 = 12 \times 2 + 0$, donc le PGCD vaut 12. -

$$\text{ppcm}(24\,;36) = \frac{24 \times 36}{12} = \frac{864}{12} = 72$$

— Les marques se retrouvent face à face après 72 **dents**.

b) On divise par le nombre de dents de chaque roue :

— Petite roue : $72 \div 24 = 3$ tours.
— Grande roue : $72 \div 36 = 2$ tours.
— **Cohérence physique** : la petite roue tourne plus vite, elle fait bien plus de tours ✓. Le rapport 3 / 2 est l'inverse du rapport des nombres de dents 24 / 36.

Réponse. a) après 72 dents · b) 3 tours pour la petite, 2 pour la grande.

Correction de l'exercice 15 – Bilan : PGCD, PPCM et paramètres

a) Algorithme d'Euclide :

— $1\,764 = 1\,260 \times 1 + 504$
— $1\,260 = 504 \times 2 + 252$
— $504 = 252 \times 2 + 0$
— Donc pgcd(1 764 ; 1 260) = 252.
— $1\,764 \div 252 = 7$ et $1\,260 \div 252 = 5$, d'où $\frac{1\,764}{1\,260} = \frac{7}{5}$.

b) Soit d un diviseur commun de $4n + 3$ et $5n + 4$.

— d divise $5(4n + 3) = 20n + 15$ et $4(5n + 4) = 20n + 16$.
— Par différence : d divise 1, donc $d = 1$.
— Autrement dit $5(4n + 3) - 4(5n + 4) = -1$ est une identité de Bézout : les deux nombres sont premiers entre eux pour tout n.
— Contrôle : $n = 3$ donne 15 et 19 ✓.

c) La longueur d'un morceau doit diviser 96 et 144, et l'on veut la plus grande.

— $144 = 96 + 48$ et $96 = 48 \times 2 + 0$, donc pgcd(96 ; 144) = 48.
— Chaque morceau mesure 48 m.
— Nombre de morceaux : $96 \div 48 = 2$ et $144 \div 48 = 3$, soit 5 morceaux en tout.

Réponse. a) 252 et $\frac{7}{5}$ · b) $5(4n + 3) - 4(5n + 4) = -1$ · c) morceaux de 48 m, 5 morceaux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).