Plaquette 5 – Synthèse : théorème de Gauss, fractions irréductibles et problèmes

PGCD, théorème de Bézout, Gauss — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorèmes du cours et leurs usages.

— **Théorème de Gauss** : si $a \mid bc$ et $\text{pgcd}(a\,;b) = 1$, alors $a \mid c$.

— **Corollaire (produit)** : si $b \mid n$, $c \mid n$ et $\text{pgcd}(b\,;c) = 1$, alors $bc \mid n$. L'hypothèse « premiers entre eux » est **indispensable**.

— **Corollaire (premier avec un produit)** : si $\text{pgcd}(a\,;b) = 1$ et $\text{pgcd}(a\,;c) = 1$, alors $\text{pgcd}(a\,;bc) = 1$.

— **Fraction irréductible** : $\dfrac{A}{B}$ est irréductible lorsque $\text{pgcd}(A\,;B) = 1$. Pour une fraction dépendant de n, on cherche une combinaison linéaire $uA + vB = 1$.

— **Forme réduite** : si $d = \text{pgcd}(a\,;b)$, alors $a = da'$, $b = db'$ avec $\text{pgcd}(a'\,;b') = 1$; et

$$\text{ppcm}(a\,;b) = d\,a'b' \qquad \text{pgcd}(a\,;b) \times \text{ppcm}(a\,;b) = ab$$

— **Différence de carrés** : $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ ramène une équation à une **équation à diviseurs**.

— **Deux congruences de modules m et n** : le système $x \equiv r_1 \pmod{m}$, $x \equiv r_2 \pmod{n}$ a des solutions **si et seulement si** $\text{pgcd}(m\,;n)$ divise $r_2 - r_1$; elles forment alors une classe modulo $\text{ppcm}(m\,;n)$.

Correction de l'exercice 1 – Appliquer le théorème de Gauss

a) On vérifie l'hypothèse du théorème de Gauss avant de l'appliquer :

— $7 \mid 5 \times n$ et $\text{pgcd}(7\,;5) = 1$ (deux nombres premiers distincts).

— **Théorème de Gauss** : si $a \mid bc$ et $\text{pgcd}(a\,;b) = 1$, alors $a \mid c$.

— Ici $a = 7$, $b = 5$, $c = n$: on conclut $7 \mid n$.

b) Non : l'hypothèse « premiers entre eux » n'est pas vérifiée, car $\text{pgcd}(6\,;4) = 2$.

— **Contre-exemple** : $n = 3$ donne $4n = 12$, qui est bien divisible par 6, alors que 6 ne divise pas 3.

— **La morale** : le théorème de Gauss ne se cite jamais sans vérifier la condition « premiers entre eux » — c'est là que se perdent la plupart des points.

Réponse. a) Gauss avec $\text{pgcd}(7\,;5) = 1$ · b) non, contre-exemple $n = 3$.

Correction de l'exercice 2 – Le corollaire du produit

a) $3 \mid n$ et $5 \mid n$, avec $\text{pgcd}(3\,;5) = 1$: le corollaire du théorème de Gauss donne $3 \times 5 = 15 \mid n$.

b) Non : $\text{pgcd}(4\,;6) = 2 \neq 1$, le corollaire ne s'applique pas.

— **Contre-exemple** : $n = 12$ est divisible par 4 et par 6, mais pas par 24.

— Le bon énoncé est ici $\text{ppcm}(4\,;6) = 12 \mid n$.

c) **Démonstration.** Supposons $b \mid n$, $c \mid n$ et $\text{pgcd}(b\,;c) = 1$.

— $b \mid n$ s'écrit $n = bk$ avec k entier.

— c divise $n = bk$, et $\text{pgcd}(c\,;b) = 1$: d'après le **théorème de Gauss**, $c \mid k$.
— Donc $k = ck'$, d'où $n = bck'$: bc divise n.
— **Conclusion** : le corollaire est démontré, et l'on voit précisément où sert l'hypothèse.

Réponse. a) $15 \mid n$ · b) non ($n = 12$) · c) $n = bk$, Gauss donne $c \mid k$.

Correction de l'exercice 3 – Une fraction toujours irréductible

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**. On cherche donc une identité de Bézout.

— On élimine n : $3(2n + 1) = 6n + 3$ et $2(3n + 2) = 6n + 4$.
— Par différence : $2(3n + 2) - 3(2n + 1) = 1$.

$$(-3) \times (2n + 1) + 2 \times (3n + 2) = 1$$

— D'après le **théorème de Bézout**, $\text{pgcd}(2n + 1\,;3n + 2) = 1$: la fraction est irréductible, quel que soit n.
— **Contrôle** : $n = 4$ donne $\frac{9}{14}$ ✓ ; $n = 10$ donne $\frac{21}{32}$ ✓ — irréductibles toutes les deux.
— **Rédaction attendue** : on peut aussi dire « soit d un diviseur commun ; d divise $2(3n + 2) - 3(2n + 1) = 1$ ». Les deux formulations valent la même chose.

Réponse. $2(3n + 2) - 3(2n + 1) = 1$: numérateur et dénominateur sont premiers entre eux.

Correction de l'exercice 4 – Une fraction à simplifier selon n

a) Soit d un diviseur commun de $n + 5$ et $2n + 3$.

— d divise $2(n + 5) = 2n + 10$ et $2n + 3$, donc leur différence : $d \mid 7$.
— Comme 7 est premier, $d = 1$ ou $d = 7$.

b) La fraction est réductible exactement quand $d = 7$, c'est-à-dire quand 7 divise $n + 5$.

— $n + 5 \equiv 0 \pmod 7$ donne $n \equiv -5 \equiv 2 \pmod 7$.
— Réciproquement, si $n \equiv 2 \pmod 7$: $n + 5 \equiv 0$ et $2n + 3 \equiv 4 + 3 = 7 \equiv 0 \pmod 7$ ✓, les deux sont bien divisibles par 7.
— **Conclusion** : F est réductible si et seulement si $n \equiv 2 \pmod 7$; sinon elle est irréductible.
— **Contrôle** : $n = 2$ donne $\frac{7}{7} = 1$ ✓ · $n = 9$ donne $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ ✓ · $n = 3$ donne $\frac{8}{9}$, irréductible ✓.

Réponse. a) $d \mid 7$ · b) réductible si et seulement si $n \equiv 2 \pmod 7$.

Correction de l'exercice 5 – Somme et différence

Soit d un diviseur commun de $a + b$ et $a - b$. On forme deux combinaisons linéaires.

— d divise $(a + b) + (a - b) = 2a$.
— d divise $(a + b) - (a - b) = 2b$.
— Donc d divise $\text{pgcd}(2a\,;2b) = 2\text{pgcd}(a\,;b) = 2 \times 1 = 2$.
— **Conclusion** : $d \in \{1\,;2\}$.

Les deux cas se produisent réellement.

— $a = 3$, $b = 2$: $a + b = 5$ et $a - b = 1$, de PGCD 1.
— $a = 5$, $b = 3$: $a + b = 8$ et $a - b = 2$, de PGCD 2.
— **Le critère** : le PGCD vaut 2 lorsque a et b sont tous les deux impairs, et 1 sinon (l'un des deux étant pair, $a + b$ et $a - b$ sont impairs).

Réponse. $d \mid 2a$ et $d \mid 2b$, donc $d \mid 2$.

Correction de l'exercice 6 – Une différence de carrés

On factorise pour se ramener à une **équation à diviseurs** :

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 105$$

— x et y étant naturels avec $x > y$, les deux facteurs sont des entiers naturels, et $x - y \leq x + y$.
— $105 = 3 \times 5 \times 7$: ses diviseurs sont $1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105$.
— On apparie : $(x-y\,;x+y) \in \{(1\,;105)\,;(3\,;35)\,;(5\,;21)\,;(7\,;15)\}$.
— On résout chaque système : $x = \dfrac{(x+y)+(x-y)}{2}$ et $y = \dfrac{(x+y)-(x-y)}{2}$.

$x-y$	$x+y$	x	y	**Contrôle**
1	105	53	52	$2\,809 - 2\,704 = 105$ ✓
3	35	19	16	$361 - 256 = 105$ ✓
5	21	13	8	$169 - 64 = 105$ ✓
7	15	11	4	$121 - 16 = 105$ ✓

— Les deux facteurs sont ici toujours de même parité (impairs), donc x et y sont bien entiers.
— **Piège** : avec $x^2 - y^2 = 30$, les couples de diviseurs sont de parités différentes, et il n'y a **aucune** solution entière.

Réponse. $(53\,;52)$, $(19\,;16)$, $(13\,;8)$ et $(11\,;4)$.

Correction de l'exercice 7 – Reconstituer deux entiers

Méthode de la forme réduite. On écrit $a = 15a'$ et $b = 15b'$ avec $\text{pgcd}(a'\,;b') = 1$.

— La relation du cours donne $ab = \text{pgcd} \times \text{ppcm} = 15 \times 1\,260 = 18\,900$.
— Donc $225\,a'b' = 18\,900$, soit $a'b' = 84$.
— On cherche les couples $(a'\,;b')$ de produit 84, premiers entre eux, avec $a' \leq b'$:

$(a'\,;b')$	pgcd	$(a\,;b)$
$(1\,;84)$	1 ✓	$(15\,;1\,260)$
$(3\,;28)$	1 ✓	$(45\,;420)$
$(4\,;21)$	1 ✓	$(60\,;315)$
$(7\,;12)$	1 ✓	$(105\,;180)$

— Les couples $(2\,;42)$ et $(6\,;14)$ sont rejetés : leurs termes ne sont pas premiers entre eux.
— **Vérification** sur $(45\,;420)$: pgcd = 15 ✓ et $\dfrac{45 \times 420}{15} = 1\,260$ ✓.

Réponse. $(15\,;1\,260)$, $(45\,;420)$, $(60\,;315)$ et $(105\,;180)$.

Correction de l'exercice 8 – PGCD et somme imposés

On pose $a = 9a'$ et $b = 9b'$ avec $\text{pgcd}(a'\,;b') = 1$.

— $a + b = 180$ devient $9(a' + b') = 180$, soit $a' + b' = 20$.
— On liste les couples de somme 20, avec $a' < b'$ et premiers entre eux :

$(a' ; b')$	pgcd	$(a ; b)$
$(1 ; 19)$	1 ✓	$(9 ; 171)$
$(3 ; 17)$	1 ✓	$(27 ; 153)$
$(7 ; 13)$	1 ✓	$(63 ; 117)$
$(9 ; 11)$	1 ✓	$(81 ; 99)$

— Les couples $(2 ; 18)$, $(4 ; 16)$, $(5 ; 15)$, $(6 ; 14)$ et $(8 ; 12)$ sont écartés : leurs termes ont un diviseur commun.
— **Remarque utile** : un diviseur commun de a' et b' divise leur somme 20 ; il suffit donc d'éliminer les couples dont les termes ont un facteur 2 ou 5 en commun.
— **Vérification** sur $(27 ; 153)$: $27 + 153 = 180$ ✓ et $\text{pgcd}(27 ; 153) = 9$ ✓.

Réponse. $(9 ; 171)$, $(27 ; 153)$, $(63 ; 117)$ et $(81 ; 99)$.

Correction de l'exercice 9 – Divisible par 6 grâce à Gauss

On montre séparément la divisibilité par 2 et par 3, puis on conclut par le corollaire de Gauss.

Divisibilité par 2.

— n et $n + 1$ sont deux entiers consécutifs : l'un des deux est pair, donc $2 \mid S$.

Divisibilité par 3. On discute selon le reste de n modulo 3.

$n \equiv$	0	1	2
Facteur divisible par 3	n	$2n + 1 \equiv 3 \equiv 0$	$n + 1 \equiv 0$

— Cas $n \equiv 1$: $2n + 1 \equiv 2 + 1 = 3 \equiv 0 \pmod 3$ ✓.
— Dans les trois cas, l'un des facteurs est divisible par 3, donc $3 \mid S$.

Conclusion. $2 \mid S$, $3 \mid S$ et $\text{pgcd}(2 ; 3) = 1$: d'après le corollaire du théorème de Gauss, $6 \mid S$.

— **Contrôle** : $n = 3$ donne $3 \times 4 \times 7 = 84 = 6 \times 14$ ✓.
— Ce résultat n'est pas un hasard : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est la somme $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, qui est bien un entier.

Réponse. $2 \mid S$ et $3 \mid S$ avec $\text{pgcd}(2 ; 3) = 1$, donc $6 \mid S$.

Correction de l'exercice 10 – Une divisibilité de puissances

On passe aux congruences modulo 7 : c'est immédiat dès qu'on remarque la bonne coïncidence.

— $9 = 7 + 2$, donc $9 \equiv 2 \pmod 7$.
— Par compatibilité avec les puissances : $9^n \equiv 2^n \pmod 7$.
— Donc $9^n - 2^n \equiv 0 \pmod 7$: la différence est divisible par 7.

Contrôle.

— $n = 2$: $81 - 4 = 77 = 7 \times 11$ ✓.
— $n = 3$: $729 - 8 = 721 = 7 \times 103$ ✓.
— **Le résultat général** : $a^n - b^n$ est toujours divisible par $a - b$, car

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right)$$

Réponse. $9 \equiv 2 \pmod 7$ donc $9^n \equiv 2^n$: la différence est divisible par 7.

Correction de l'exercice 11 – Un système sans solution

Les modules 8 et 12 ont le diviseur commun 4 : c'est par là qu'il faut regarder.

— $x \equiv 3 \pmod 8$ entraîne $x \equiv 3 \pmod 4$ (car $4 \mid 8$).
— $x \equiv 5 \pmod{12}$ entraîne $x \equiv 5 \equiv 1 \pmod 4$ (car $4 \mid 12$).
— Un même entier devrait donc être congru à 3 **et** à 1 modulo 4 : impossible, un entier n'a qu'un seul reste.

Conclusion. Le système n'a aucune solution.

— **Le critère général** : le système $x \equiv r_1 \pmod m$, $x \equiv r_2 \pmod n$ a des solutions si et seulement si $\text{pgcd}(m\,;n)$ divise $r_2 - r_1$.
— Ici $\text{pgcd}(8\,;12) = 4$ et $r_2 - r_1 = 2$: 4 ne divise pas 2, d'où l'impossibilité.

Réponse. Modulo 4, il faudrait $x \equiv 3$ et $x \equiv 1$: impossible.

Correction de l'exercice 12 – Un système qui, lui, fonctionne

Étape 1 : vérifier la compatibilité.

— $\text{pgcd}(8\,;12) = 4$ et $r_2 - r_1 = 7 - 3 = 4$: 4 divise 4 ✓, il y a des solutions.

Étape 2 : résoudre.

— $x \equiv 3 \pmod 8$ s'écrit $x = 8k + 3$.
— On reporte : $8k + 3 \equiv 7 \pmod{12}$, donc $8k \equiv 4 \pmod{12}$.
— 8, 4 et 12 sont divisibles par 4 : on simplifie tout, module compris, ce qui donne $2k \equiv 1 \pmod 3$.
— L'inverse de 2 modulo 3 est 2 ($4 \equiv 1$), donc $k \equiv 2 \pmod 3$, soit $k = 3t + 2$.
— En remontant : $x = 8(3t + 2) + 3 = 24t + 19$.

Conclusion. $x \equiv 19 \pmod{24}$, et $24 = \text{ppcm}(8\,;12)$ comme annoncé.

— **Vérification** : $19 = 8 \times 2 + 3$ ✓ et $19 = 12 + 7$ ✓.

Réponse. $x \equiv 19 \pmod{24}$.

Correction de l'exercice 13 – Les trois cloches

a) « Sonner ensemble » : l'instant cherché est le **PPCM** des trois périodes.

— $\text{pgcd}(18\,;24) = 6$, donc $\text{ppcm}(18\,;24) = \dfrac{18 \times 24}{6} = 72$.
— $\text{pgcd}(72\,;40) = 8$ (car $72 = 40 + 32$, $40 = 32 + 8$, $32 = 8 \times 4$), donc $\text{ppcm}(72\,;40) = \dfrac{72 \times 40}{8} = 360$.
— Le PPCM des trois périodes vaut 360 minutes, soit 6 heures.

Conclusion. Les trois cloches sonneront de nouveau ensemble à **18 h**.

b) On divise 360 par chaque période :

Cloche	Période	Nombre de coups
1	18 min	$360 \div 18 = 20$
2	24 min	$360 \div 24 = 15$
3	40 min	$360 \div 40 = 9$

— Le dernier coup de chaque colonne est celui de 18 h, commun aux trois ✓.

Réponse. a) à 18 h (ppcm = 360 min) · b) 20, 15 et 9 coups.

Correction de l'exercice 14 – Deux rouleaux et un seul format

a) La longueur d'une bande divise 252 et 198 ; « le moins de bandes possible » signifie « les bandes les plus longues », donc le **PGCD**.

— $252 = 198 + 54$; $198 = 54 \times 3 + 36$; $54 = 36 + 18$; $36 = 18 \times 2 + 0$.
— $\text{pgcd}(252\,;198) = 18$: les bandes mesurent 18 cm.
— Nombre de bandes : $252 \div 18 = 14$ et $198 \div 18 = 11$, soit 25 bandes.

b) Il faudrait que 18 divise 300.

— $300 = 18 \times 16 + 12$: le reste n'est pas nul, donc **non**.
— S'il veut un format commun aux trois rouleaux, il doit prendre un diviseur commun de 252, 198 et 300 : $\text{pgcd}(18\,;300) = 6$.
— Avec des bandes de 6 cm, il obtiendrait $42 + 33 + 50 = 125$ bandes, sans aucune perte.
— **Vérification** : $6 \times 42 = 252$ ✓, $6 \times 33 = 198$ ✓, $6 \times 50 = 300$ ✓.

Réponse. a) bandes de 18 cm, 25 bandes · b) non, il faut descendre à 6 cm (125 bandes).

Correction de l'exercice 15 – Bilan : tout le chapitre

a) Soit d un diviseur commun de $3n + 4$ et $4n + 5$.

— d divise $4(3n + 4) = 12n + 16$ et $3(4n + 5) = 12n + 15$.
— Par différence : $d \mid 1$, donc $d = 1$.
— Autrement dit $4(3n + 4) - 3(4n + 5) = 1$ est une identité de Bézout : la fraction est irréductible pour tout n.
— Contrôle : $n = 2$ donne $\frac{10}{13}$ ✓ ; $n = 6$ donne $\frac{22}{29}$ ✓.

b) $11 \mid 6 \times n$ et $\text{pgcd}(11\,;6) = 1$ (11 est premier et ne divise pas 6).

— D'après le **théorème de Gauss**, $11 \mid n$.
— Contrôle : si $6n$ est un multiple de 11, par exemple $6n = 66$, alors $n = 11$ ✓.

c) On cherche le **PPCM** de 45 et 60.

— $\text{pgcd}(60\,;45)$: $60 = 45 + 15$ et $45 = 15 \times 3 + 0$, donc le PGCD vaut 15.
— $\text{ppcm}(45\,;60) = \frac{45 \times 60}{15} = \frac{2\,700}{15} = 180$.
— Ils se retrouvent au bout de 180 **jours**, soit le 30 juin d'une année non bissextile.
— Survols : $180 \div 45 = 4$ pour le premier, $180 \div 60 = 3$ pour le second.

Réponse. a) $4(3n + 4) - 3(4n + 5) = 1$ · b) Gauss avec $\text{pgcd}(11\,;6) = 1$ · c) 180 jours ; 4 et 3 survols.