Plaquette 4 – Équations diophantiennes ax + by = c

PGCD, théorème de Bézout, Gauss — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

La méthode complète, toujours dans le même ordre : **tester l'existence** d'une solution avec le PGCD, **trouver une solution particulière** (à l'œil ou par Bézout), **décrire toutes les solutions** grâce au théorème de Gauss, puis **sélectionner** celles qu'impose le problème concret (entiers naturels, nombre de pièces, de boîtes).

Exercice 1 – Existe-t-il des solutions ?

Dire, sans les résoudre, si les équations suivantes admettent des solutions entières :

a) $12x + 18y = 21$

b) $12x + 18y = 30$

c) $4x + 6y = 9$

Exercice 2 – Une solution particulière à l'œil

On considère l'équation $5x + 3y = 7$.

a) Justifier qu'elle admet des solutions.

b) En trouver une par essais organisés.

Exercice 3 – Résolution complète

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x + 3y = 7$.

Exercice 4 – Passer par Bézout

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17x + 40y = 1$.

Exercice 5 – Un second membre différent de 1

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23x + 17y = 5$.

Exercice 6 – Quand le PGCD ne vaut pas 1

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $12x + 18y = 30$.

Exercice 7 – De la congruence à l'équation

a) Montrer que résoudre $9x \equiv 6 \pmod{15}$ revient à résoudre l'équation $9x - 15y = 6$.

b) Résoudre cette équation et retrouver les solutions de la congruence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Des solutions positives seulement

Un distributeur n'accepte que des pièces de 7 centimes et de 11 centimes (monnaie imaginaire).

De combien de façons peut-on payer exactement 100 centimes ?

Exercice 9 – Billets de 20 et 50 euros

Un distributeur délivre 380 € en billets de 20 € et de 50 €.

Déterminer toutes les compositions possibles du retrait.

Exercice 10 – Conditionner en cartons

Un entrepôt doit expédier 236 pièces détachées dans des cartons de 12 pièces et des cartons de 20 pièces, **tous complets**.

a) Déterminer toutes les répartitions possibles.

b) Laquelle utilise le moins de cartons ?

Exercice 11 – Les montants impossibles

Un automate n'accepte que des jetons de 3 € et de 5 €, sans rendre la monnaie.

a) Quels montants entiers ne peut-on **pas** payer ?

b) Montrer que tout montant supérieur ou égal à 8 € est payable.

Exercice 12 – Peser avec deux masses

On dispose d'une balance à deux plateaux et d'un grand nombre de masses de 7 g et de 11 g. Les masses peuvent être posées sur **les deux** plateaux.

Comment peser un objet de 1 g ?

Exercice 13 – Points entiers d'une droite

On considère la droite (D) d'équation $11x + 8y = 200$ dans un repère du plan.

a) Déterminer tous les points de (D) à coordonnées entières.

b) Combien d'entre eux ont leurs deux coordonnées positives ou nulles ?

Exercice 14 – Deux contraintes à la fois

Un club achète des ballons à 15 € et des maillots à 4 € pour un total de 203 €.

Sachant qu'il achète **au moins deux** ballons, déterminer toutes les commandes possibles.

Exercice 15 – Bilan : trois équations

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $15x + 4y = 3$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $6x + 9y = 15$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Une confiserie vend des sachets de 5 bonbons et des boîtes de 8 bonbons. Un client repart avec exactement 143 bonbons. Quelles sont les commandes possibles ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).