

**Plaquette 1 - Euclide, identité de
Bézout et équations diophantiennes**
PGCD, Bézout et Gauss — Terminale maths expertes
Exercices

Méthode

On calcule un PGCD par l'**algorithme d'Euclide**, on remonte l'algorithme pour obtenir une **identité de Bézout**, on applique les théorèmes de **Bézout** et de **Gauss**, puis on résout des équations diophantiennes $ax + by = c$.

Exercice 1 - Algorithme d'Euclide

Calculer $\text{pgcd}(1\,071 ; 462)$ par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 2 - PGCD et nombres premiers entre eux

- a) Calculer $\text{pgcd}(84 ; 35)$.
- b) Les entiers 17 et 60 sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 3 - Remonter l'algorithme (Bézout)

Déterminer deux entiers u et v tels que $17u + 60v = 1$.

Exercice 4 - Théorème de Bézout

- a) Énoncer le théorème de Bézout.
- b) Les entiers 12 et 18 sont-ils premiers entre eux ? Peut-on trouver u, v tels que $12u + 18v = 1$?

Exercice 5 - Théorème de Gauss

Soit n un entier tel que $7 \mid 5n$.

- a) Montrer que $7 \mid n$.
- b) Quel théorème a-t-on utilisé ?

Exercice 6 - PGCD et PPCM

Soit $a = 36$ et $b = 60$.

- a) Calculer $\text{pgcd}(a ; b)$.
- b) En déduire $\text{ppcm}(a ; b)$.

Exercice 7 - Condition d'existence d'une solution

Ces équations ont-elles des solutions entières ?

- a) $6x + 9y = 21$
- b) $6x + 9y = 20$
- c) $14x + 21y = 7$

Exercice 8 - Solution particulière

Trouver une solution particulière de $5x + 3y = 1$, puis de $5x + 3y = 7$.

Exercice 9 - Solution générale

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x + 3y = 7$.

Exercice 10 - Équation avec PGCD non trivial

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $6x + 9y = 21$.

Exercice 11 - Application : problème de pièces

On veut payer exactement 43 € avec des billets de 5 € et de 2 €.

- a) Écrire l'équation correspondante.
- b) Donner toutes les solutions en nombres **positifs**.

Exercice 12 - Utiliser Gauss pour une divisibilité

Soit n un entier tel que n est divisible par 4 et par 9.

Montrer que n est divisible par 36.

Exercice 13 - Synthèse : PGCD dépendant de n

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a = 2n + 3$ et $b = n + 1$.

- a) Calculer $a - 2b$.
- b) En déduire $\text{pgcd}(a; b)$.