Plaquette 1 – Euclide, identité de Bézout et équations diophantiennes

PGCD, Bézout et Gauss — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On calcule un PGCD par l'**algorithme d'Euclide**, on remonte l'algorithme pour obtenir une **identité de Bézout**, on applique les théorèmes de **Bézout** et de **Gauss**, puis on résout des équations diophantiennes $ax + by = c$.

Exercice 1 – Algorithme d'Euclide

Calculer $\text{pgcd}(1\,071\,;462)$ par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 2 – PGCD et nombres premiers entre eux

a) Calculer $\text{pgcd}(84\,;35)$.

b) Les entiers 17 et 60 sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 3 – Remonter l'algorithme (Bézout)

Déterminer deux entiers u et v tels que $17u + 60v = 1$.

Exercice 4 – Théorème de Bézout

a) Énoncer le théorème de Bézout.

b) Les entiers 12 et 18 sont-ils premiers entre eux ? Peut-on trouver u, v tels que $12u + 18v = 1$?

Exercice 5 – Théorème de Gauss

Soit n un entier tel que $7 \mid 5n$.

a) Montrer que $7 \mid n$.

b) Quel théorème a-t-on utilisé ?

Exercice 6 – PGCD et PPCM

Soit $a = 36$ et $b = 60$.

a) Calculer $\text{pgcd}(a\,;b)$.

b) En déduire $\text{ppcm}(a\,;b)$.

Exercice 7 – Condition d'existence d'une solution

Ces équations ont-elles des solutions entières ?

a) $6x + 9y = 21$

b) $6x + 9y = 20$

c) $14x + 21y = 7$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Solution particulière

Trouver une solution particulière de $5x + 3y = 1$, puis de $5x + 3y = 7$.

Exercice 9 – Solution générale

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x + 3y = 7$.

Exercice 10 – Équation avec PGCD non trivial

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $6x + 9y = 21$.

Exercice 11 – Application : problème de pièces

On veut payer exactement 43 € avec des billets de 5 € et de 2 €.

a) Écrire l'équation correspondante.

b) Donner toutes les solutions en nombres **positifs**.

Exercice 12 – Utiliser Gauss pour une divisibilité

Soit n un entier tel que n est divisible par 4 et par 9.

Montrer que n est divisible par 36.

Exercice 13 – Simplifier une fraction avec Euclide

Rendre irréductible la fraction $\frac{1\,071}{462}$ en calculant le PGCD de 1 071 et 462 par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 14 – Corollaire de Gauss

Soit n un entier divisible à la fois par 4 et par 9.

a) Montrer que n est divisible par 36.

b) Un entier divisible par 4 et par 6 est-il toujours divisible par 24 ?

Exercice 15 – Synthèse : PGCD dépendant de n

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a = 2n + 3$ et $b = n + 1$.

a) Calculer $a - 2b$.

b) En déduire $\text{pgcd}(a\,;b)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).