

Plaque 2 - PGCD, PPCM et algorithme d'Euclide

PGCD, théorème de Bézout, Gauss — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On calcule des PGCD par l'**algorithme d'Euclide**, on s'en sert pour simplifier une fraction, on relie PGCD et **PPCM**, on détermine le PGCD d'expressions dépendant de n , et on reconnaît dans un problème concret lequel des deux est en jeu : un **partage** appelle le PGCD, une **coïncidence** appelle le PPCM.

Exercice 1 - Algorithme d'Euclide

Déterminer $\text{pgcd}(4\,539; 1\,958)$ par l'algorithme d'Euclide, en présentant les divisions successives.

Exercice 2 - PGCD de trois entiers

Déterminer $\text{pgcd}(168; 252; 420)$.

Exercice 3 - Premiers entre eux ou non

Les couples suivants sont-ils formés de nombres premiers entre eux ?

- a) 35 et 64
- b) 91 et 143
- c) 221 et 391

Exercice 4 - Rendre une fraction irréductible

Rendre irréductible la fraction $\frac{3\,234}{5\,390}$.

Exercice 5 - Du PGCD au PPCM

- a) Calculer $\text{pgcd}(84; 90)$.
- b) En déduire $\text{ppcm}(84; 90)$ sans lister les multiples.

Exercice 6 - PPCM de trois nombres

Trois lignes de bus partent ensemble du même terminus à 6 h. La première passe toutes les 12 minutes, la deuxième toutes les 18 minutes, la troisième toutes les 30 minutes.

À quelle heure se retrouveront-elles ensemble au terminus pour la première fois ?

Exercice 7 - PGCD d'entiers consécutifs

Soit n un entier naturel.

- a) Montrer que $\text{pgcd}(n; n + 1) = 1$.

b) Montrer que $2n + 1$ et $2n + 3$ sont premiers entre eux.

Exercice 8 - Un PGCD qui dépend de n

Soit n un entier naturel et $d = \text{pgcd}(n + 3 ; n + 7)$.

- a) Montrer que d divise 4.
- b) Déterminer d selon les valeurs de n .

Exercice 9 - Toujours premiers entre eux

Montrer que pour tout entier naturel n , les entiers $3n + 2$ et $5n + 3$ sont premiers entre eux.

Exercice 10 - Somme et PGCD imposés

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a ; b)$ tels que $a + b = 84$, $a < b$ et $\text{pgcd}(a ; b) = 12$.

Exercice 11 - PGCD et PPCM imposés

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a ; b)$ tels que $a \leq b$, $\text{pgcd}(a ; b) = 6$ et $\text{ppcm}(a ; b) = 180$.

Exercice 12 - Carreler sans découper

Une pièce rectangulaire mesure 4,50 m sur 3,15 m. On veut la carreler avec des dalles **carrées identiques**, sans aucune découpe, en utilisant les dalles les plus grandes possible.

- a) Quel est le côté de ces dalles ?
- b) Combien en faut-il ?

Exercice 13 - Composer des bouquets identiques

Un fleuriste dispose de 252 roses et 180 tulipes. Il veut composer des bouquets **identiques** en utilisant **toutes** les fleurs.

- a) Quel est le nombre maximal de bouquets ?
- b) De quoi est composé chaque bouquet ?

Exercice 14 - Deux engrenages

Deux roues dentées engrenées comptent respectivement 24 et 36 dents. Une marque est faite sur une dent de chaque roue, et les deux marques sont face à face.

- a) Après combien de dents passées les deux marques se retrouveront-elles face à face ?
- b) Combien de tours chaque roue aura-t-elle effectués ?

Exercice 15 – Bilan : PGCD, PPCM et paramètres

- a) Calculer $\text{pgcd}(1\,764 ; 1\,260)$ et en déduire la forme irréductible de $\frac{1\,764}{1\,260}$.
- b) Montrer que pour tout entier naturel n , $4n + 3$ et $5n + 4$ sont premiers entre eux.
- c) Deux rouleaux de tissu mesurent 96 m et 144 m. On veut les couper en morceaux de même longueur entière, la plus grande possible, sans perte. Combien de morceaux obtient-on ?