Plaquette 2 – PGCD, PPCM et algorithme d'Euclide

PGCD, théorème de Bézout, Gauss — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On calcule des PGCD par l'**algorithme d'Euclide**, on s'en sert pour simplifier une fraction, on relie PGCD et **PPCM**, on détermine le PGCD d'expressions dépendant de n, et on reconnaît dans un problème concret lequel des deux est en jeu : un **partage** appelle le PGCD, une **coïncidence** appelle le PPCM.

Exercice 1 – Algorithme d'Euclide

Déterminer $\text{pgcd}(4\,539\,;1\,958)$ par l'algorithme d'Euclide, en présentant les divisions successives.

Exercice 2 – PGCD de trois entiers

Déterminer $\text{pgcd}(168\,;252\,;420)$.

Exercice 3 – Premiers entre eux ou non

Les couples suivants sont-ils formés de nombres premiers entre eux ?

a) 35 et 64

b) 91 et 143

c) 221 et 391

Exercice 4 – Rendre une fraction irréductible

Rendre irréductible la fraction $\dfrac{3\,234}{5\,390}$.

Exercice 5 – Du PGCD au PPCM

a) Calculer $\text{pgcd}(84\,;90)$.

b) En déduire $\text{ppcm}(84\,;90)$ sans lister les multiples.

Exercice 6 – PPCM de trois nombres

Trois lignes de bus partent ensemble du même terminus à 6 h. La première passe toutes les 12 minutes, la deuxième toutes les 18 minutes, la troisième toutes les 30 minutes.

À quelle heure se retrouveront-elles ensemble au terminus pour la première fois ?

Exercice 7 – PGCD d'entiers consécutifs

Soit n un entier naturel.

a) Montrer que $\text{pgcd}(n\,;n+1)=1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que $2n+1$ et $2n+3$ sont premiers entre eux.

Exercice 8 – Un PGCD qui dépend de n

Soit n un entier naturel et $d = \text{pgcd}(n+3\,;n+7)$.

a) Montrer que d divise 4.

b) Déterminer d selon les valeurs de n.

Exercice 9 – Toujours premiers entre eux

Montrer que pour tout entier naturel n, les entiers $3n+2$ et $5n+3$ sont premiers entre eux.

Exercice 10 – Somme et PGCD imposés

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ tels que $a+b=84$, $a<b$ et $\text{pgcd}(a\,;b)=12$.

Exercice 11 – PGCD et PPCM imposés

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ tels que $a \leq b$, $\text{pgcd}(a\,;b)=6$ et $\text{ppcm}(a\,;b)=180$.

Exercice 12 – Carreler sans découper

Une pièce rectangulaire mesure $4,50$ m sur $3,15$ m. On veut la carreler avec des dalles **carrées identiques**, sans aucune découpe, en utilisant les dalles les plus grandes possible.

a) Quel est le côté de ces dalles ?

b) Combien en faut-il ?

Exercice 13 – Composer des bouquets identiques

Un fleuriste dispose de 252 roses et 180 tulipes. Il veut composer des bouquets **identiques** en utilisant **toutes** les fleurs.

a) Quel est le nombre maximal de bouquets ?

b) De quoi est composé chaque bouquet ?

Exercice 14 – Deux engrenages

Deux roues dentées engrenées comptent respectivement 24 et 36 dents. Une marque est faite sur une dent de chaque roue, et les deux marques sont face à face.

a) Après combien de dents passées les deux marques se retrouveront-elles face à face ?

b) Combien de tours chaque roue aura-t-elle effectués ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Bilan : PGCD, PPCM et paramètres

a) Calculer pgcd(1 764 ; 1 260) et en déduire la forme irréductible de $\frac{1\,764}{1\,260}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $4n + 3$ et $5n + 4$ sont premiers entre eux.

c) Deux rouleaux de tissu mesurent 96 m et 144 m. On veut les couper en morceaux de même longueur entière, la plus grande possible, sans perte. Combien de morceaux obtient-on ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).