

Plaquette 5 - Synthèse : théorème de Gauss, fractions irréductibles et problèmes

PGCD, théorème de Bézout, Gauss — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

La plaquette de synthèse du chapitre : on applique le **théorème de Gauss** et son corollaire, on démontre qu'une fraction dépendant de n est **toujours irréductible**, on reconstitue deux entiers à partir de leur **PGCD**, de leur **PPCM** ou de leur somme, et on traite des problèmes où PGCD et PPCM interviennent ensemble.

Exercice 1 - Appliquer le théorème de Gauss

- a) Soit n un entier tel que $7 \mid 5n$. Montrer que $7 \mid n$.
- b) Soit n un entier tel que $6 \mid 4n$. A-t-on nécessairement $6 \mid n$?

Exercice 2 - Le corollaire du produit

- a) Soit n un entier divisible par 3 et par 5. Montrer que $15 \mid n$.
- b) Un entier n est divisible par 4 et par 6. Est-il nécessairement divisible par 24 ?
- c) Démontrer le corollaire utilisé en a).

Exercice 3 - Une fraction toujours irréductible

Montrer que pour tout entier naturel n , la fraction $\frac{2n+1}{3n+2}$ est irréductible.

Exercice 4 - Une fraction à simplifier selon n

Soit n un entier naturel et $F = \frac{n+5}{2n+3}$.

- a) Montrer que $\text{pgcd}(n+5; 2n+3)$ divise 7.
- b) Pour quelles valeurs de n la fraction F est-elle réductible ?

Exercice 5 - Somme et différence

Soit a et b deux entiers **premiers entre eux**.

Montrer que $\text{pgcd}(a+b; a-b)$ divise 2.

Exercice 6 - Une différence de carrés

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x; y)$ tels que $x^2 - y^2 = 105$.

Exercice 7 - Reconstituer deux entiers

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$ avec $a \leq b$ tels que

$$\text{pgcd}(a; b) = 15 \quad \text{et} \quad \text{ppcm}(a; b) = 1\,260$$

Exercice 8 - PGCD et somme imposés

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$ avec $a < b$, tels que $a + b = 180$ et $\text{pgcd}(a; b) = 9$.

Exercice 9 - Divisible par 6 grâce à Gauss

Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre $S = n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 6.

Exercice 10 - Une divisibilité de puissances

Montrer que pour tout entier naturel n , 7 divise $9^n - 2^n$.

Exercice 11 - Un système sans solution

Montrer que le système

$$x \equiv 3 \pmod{8} \quad \text{et} \quad x \equiv 5 \pmod{12}$$

n'admet aucune solution entière.

Exercice 12 - Un système qui, lui, fonctionne

Résoudre le système

$$x \equiv 3 \pmod{8} \quad \text{et} \quad x \equiv 7 \pmod{12}$$

Exercice 13 - Les trois cloches

Trois cloches sonnent ensemble à midi. La première sonne toutes les 18 minutes, la deuxième toutes les 24 minutes, la troisième toutes les 40 minutes.

- À quelle heure sonneront-elles de nouveau ensemble ?
- Combien de fois chacune aura-t-elle sonné entre-temps (le coup de midi non compté) ?

Exercice 14 - Deux rouleaux et un seul format

Un imprimeur dispose de deux rouleaux de papier de 252 cm et 198 cm de long. Il les découpe en bandes **de même longueur entière**, sans perte, et veut obtenir le moins de bandes possible.

- Quelle est la longueur d'une bande, et combien en obtient-il ?
- Il achète ensuite un troisième rouleau de 300 cm. Peut-il garder le même format de bande ?

Exercice 15 - Bilan : tout le chapitre

- Montrer que pour tout entier naturel n , la fraction $\frac{3n+4}{4n+5}$ est irréductible.
- Soit n un entier tel que $11 \mid 6n$. Montrer que $11 \mid n$.
- Deux satellites survolent une base tous les 45 jours et tous les 60 jours. Ils l'ont survolée ensemble le 1^{er} janvier. Au bout de combien de jours se retrouveront-ils, et

combien de survols chacun aura-t-il effectués ?