Plaquette 5 – Synthèse : théorème de Gauss, fractions irréductibles et problèmes

PGCD, théorème de Bézout, Gauss — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

La plaquette de synthèse du chapitre : on applique le **théorème de Gauss** et son corollaire, on démontre qu'une fraction dépendant de n est **toujours irréductible**, on reconstitue deux entiers à partir de leur **PGCD**, de leur **PPCM** ou de leur somme, et on traite des problèmes où PGCD et PPCM interviennent ensemble.

Exercice 1 – Appliquer le théorème de Gauss

a) Soit n un entier tel que $7 \mid 5n$. Montrer que $7 \mid n$.

b) Soit n un entier tel que $6 \mid 4n$. A-t-on nécessairement $6 \mid n$?

Exercice 2 – Le corollaire du produit

a) Soit n un entier divisible par 3 et par 5. Montrer que $15 \mid n$.

b) Un entier n est divisible par 4 et par 6. Est-il nécessairement divisible par 24 ?

c) Démontrer le corollaire utilisé en a).

Exercice 3 – Une fraction toujours irréductible

Montrer que pour tout entier naturel n, la fraction $\dfrac{2n+1}{3n+2}$ est irréductible.

Exercice 4 – Une fraction à simplifier selon n

Soit n un entier naturel et $F = \dfrac{n+5}{2n+3}$.

a) Montrer que $\text{pgcd}(n+5\,;2n+3)$ divise 7.

b) Pour quelles valeurs de n la fraction F est-elle réductible ?

Exercice 5 – Somme et différence

Soit a et b deux entiers **premiers entre eux**.

Montrer que $\text{pgcd}(a+b\,;a-b)$ divise 2.

Exercice 6 – Une différence de carrés

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ tels que $x^2 - y^2 = 105$.

Exercice 7 – Reconstituer deux entiers

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ avec $a \leq b$ tels que

$$\text{pgcd}(a\,;b) = 15 \qquad \text{et} \qquad \text{ppcm}(a\,;b) = 1\,260$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – PGCD et somme imposés

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ avec $a < b$, tels que $a + b = 180$ et $\text{pgcd}(a\,;b) = 9$.

Exercice 9 – Divisible par 6 grâce à Gauss

Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $S = n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 10 – Une divisibilité de puissances

Montrer que pour tout entier naturel n, 7 divise $9^n - 2^n$.

Exercice 11 – Un système sans solution

Montrer que le système

$$x \equiv 3 \pmod 8 \qquad \text{et} \qquad x \equiv 5 \pmod{12}$$

n'admet aucune solution entière.

Exercice 12 – Un système qui, lui, fonctionne

Résoudre le système

$$x \equiv 3 \pmod 8 \qquad \text{et} \qquad x \equiv 7 \pmod{12}$$

Exercice 13 – Les trois cloches

Trois cloches sonnent ensemble à midi. La première sonne toutes les 18 minutes, la deuxième toutes les 24 minutes, la troisième toutes les 40 minutes.

a) À quelle heure sonneront-elles de nouveau ensemble ?

b) Combien de fois chacune aura-t-elle sonné entre-temps (le coup de midi non compté) ?

Exercice 14 – Deux rouleaux et un seul format

Un imprimeur dispose de deux rouleaux de papier de 252 cm et 198 cm de long. Il les découpe en bandes **de même longueur entière**, sans perte, et veut obtenir le moins de bandes possible.

a) Quelle est la longueur d'une bande, et combien en obtient-il ?

b) Il achète ensuite un troisième rouleau de 300 cm. Peut-il garder le même format de bande ?

Exercice 15 – Bilan : tout le chapitre

a) Montrer que pour tout entier naturel n, la fraction $\dfrac{3n+4}{4n+5}$ est irréductible.

b) Soit n un entier tel que $11 \mid 6n$. Montrer que $11 \mid n$.

c) Deux satellites survolent une base tous les 45 jours et tous les 60 jours. Ils l'ont survolée ensemble le 1^{er} janvier. Au bout de combien de jours se retrouveront-ils, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

combien de survols chacun aura-t-il effectués ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).