

Plaquette 3 - Dichotomie, intégrales — algorithmes

Algorithmique et Python — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dichotomie (f continue sur $[a; b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires) : on coupe en $m = \frac{a+b}{2}$ et on garde la moitié où il y a un changement de signe.

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

Après n étapes, l'amplitude vaut $\frac{b-a}{2^n}$; il faut $n \geq \frac{\ln((b-a)/e)}{\ln 2}$ étapes pour la précision e .

Sommes d'aires (pas $h = \frac{b-a}{n}$, points $x_k = a + kh$) :

$$\text{gauche: } h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{milieu: } h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) \quad \text{trapèzes: } h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right)$$

Encadrement : si f est monotone, les sommes à gauche et à droite **encadrent** l'intégrale, avec un écart $\frac{(b-a)|f(b) - f(a)|}{n}$.

Précision : doubler n divise environ par 2 l'erreur des rectangles, par 4 celle du point milieu et des trapèzes.

Correction de l'exercice 1 - Faire tourner une dichotomie

a) f est continue, $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 2 > 0$: par le **théorème des valeurs intermédiaires**, f s'annule sur $[1; 2]$ (en $\sqrt{2}$).

b) À chaque étape, on calcule le signe de $f(m)$ et on garde la moitié où f change de signe :

Étape	a	b	m	$f(m)$
1	1	2	1,5	$0,25 > 0$
2	1	1,5	1,25	$-0,4375 < 0$
3	1,25	1,5	1,375	$-0,109 < 0$
4	1,375	1,5	1,4375	$0,066 > 0$

Après 4 étapes : $1,375 < \sqrt{2} < 1,4375$, amplitude

$$\frac{2-1}{2^4} = 0,0625$$

— **Contrôle** : $\sqrt{2} \approx 1,414$ est bien dans l'intervalle ✓

Réponse. $1,375 < \sqrt{2} < 1,4375$.

Correction de l'exercice 2 - Combien d'étapes ?

a) Chaque étape **divise par 2** la longueur de l'intervalle : après n étapes, l'amplitude vaut $\frac{1}{2^n}$.

b) On veut $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-6}$, soit $2^n \geq 10^6$:

$$n \geq \frac{6 \ln 10}{\ln 2} \approx 19,93$$

— Il faut **20 étapes**.

— **Efficacité** : chaque étape apporte un « bit » d'information ; environ 3,3 étapes par décimale exacte. Un balayage au pas de 10^{-6} demanderait jusqu'à un **million** d'évaluations de f .

Réponse. a) $\frac{1}{2^n}$ · b) 20 étapes.

Correction de l'exercice 3 - Écrire la fonction de dichotomie

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

Justification : si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires (produit négatif ou nul), le TVI garantit une solution dans $[a; m]$; on garde cette moitié. Sinon, $f(m)$ a le signe de $f(a)$, donc le changement de signe est dans $[m; b]$.

$$f(a) \times f(m) \leq 0 \Rightarrow \text{solution dans } [a; m]$$

— **Invariant** : à chaque tour, $f(a)$ et $f(b)$ restent de signes contraires ; l'intervalle contient toujours une solution.

— **Terminaison** : $b - a$ est divisé par 2 à chaque tour et finit par passer sous e .

Réponse. Boucle *while* $b - a > e$; on garde $[a; m]$ si $f(a)f(m) \leq 0$.

Correction de l'exercice 4 - Résoudre $\cos x = x$

a) f est continue ; $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = \cos 1 - 1 \approx -0,46 < 0$: signes contraires ✓

De plus $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur $[0; 1]$: la solution est **unique**.

b) La solution α de $\cos \alpha = \alpha$ vérifie

$$0,738\,28 < \alpha < 0,739\,26$$

— Donc $\alpha \approx 0,739$ à 10^{-3} près.

— **Nombre d'étapes** : $\frac{1}{2^{10}} \approx 0,000\,98 \leq 10^{-3}$, alors que $\frac{1}{2^9} \approx 0,002$ ne suffit pas ✓

— **Remarque** : cette équation n'a pas de solution « exprimable » avec les fonctions usuelles ; l'algorithme est le seul moyen de l'approcher.

Réponse. $\alpha \approx 0,739$.

Correction de l'exercice 5 - Quand la dichotomie se trompe

a) $f(-2) = f(2) = 3 > 0$: les valeurs aux bornes sont de **même signe**. L'hypothèse de la dichotomie n'est pas remplie, bien que f s'annule en -1 et en 1 .

b) Au premier tour, $m = 0$ et $f(0) = -1$: $f(a)f(m) < 0$, on garde $[-2; 0]$; l'algorithme converge alors vers -1 — par chance. Mais il a « ignoré » la solution 1 , et avec d'autres fonctions il pourrait renvoyer un intervalle **sans aucune solution**.

Sur $[0; 2]$: $f(0) = -1 < 0 < f(2) = 3$, l'hypothèse est remplie et l'algorithme converge vers 1 .

$$f(a) \times f(b) < 0 \text{ est indispensable}$$

— **Leçon** : il faut d'abord **isoler** chaque solution sur un intervalle où f change de signe (tableau de variations).

Réponse. Hypothèse non remplie sur $[-2; 2]$; sur $[0; 2]$, convergence vers 1 .

Correction de l'exercice 6 - Rectangles à gauche et à droite

a) Avec le pas $h = \frac{b-a}{n}$:

```
def gauche(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(a + k*h)
    return h * s

def droite(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(1, n + 1):
        s = s + f(a + k*h)
    return h * s
```

b) $x \mapsto \frac{1}{x}$ est **décroissante** : sur chaque bande, le rectangle de gauche (hauteur $f(x_k)$) dépasse la courbe, celui de droite reste dessous.

$$0,6688 \leq \ln 2 \leq 0,7188$$

— **Contrôle** : $\ln 2 \approx 0,6931$ ✓ ; l'écart entre les deux sommes vaut

$$\frac{(2-1) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{10} = 0,05.$$

Réponse. $0,6688 \leq \ln 2 \leq 0,7188$.

Correction de l'exercice 7 - La méthode des trapèzes

Sur chaque bande, on remplace la courbe par un **segment** ; l'aire d'un trapèze est $h \times \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$. En sommant :

```
def trapezes(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = (f(a) + f(b)) / 2
    for k in range(1, n):
        s = s + f(a + k*h)
    return h * s
```

— Avec $f = \exp$ et $n = 4$: environ $1,7272$.

— Valeur exacte :

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1,7183$$

- **Erreur** : environ 0,009, soit 0,5 % avec seulement 4 trapèzes.
- **Sens de l'erreur** : l'exponentielle est **convexe**, ses cordes sont au-dessus de la courbe ; les trapèzes **surestiment** l'intégrale ✓

Réponse. $\approx 1,7272$ contre $e - 1 \approx 1,7183$.

Correction de l'exercice 8 - Approcher π par une intégrale

On prend la hauteur au **milieu** de chaque bande, $f\left(x_k + \frac{h}{2}\right)$:

```
def milieu(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(a + (k + 0.5)*h)
    return h * s

def f(x):
    return 4 / (1 + x**2)

print(milieu(f, 0, 1, 10))
```

Le script affiche environ 3,142 43, contre $\pi \approx 3,141 59$.

$$|3,142 43 - \pi| \approx 8 \times 10^{-4}$$

- Avec seulement 10 évaluations, on obtient 3 décimales exactes.
- **Pourquoi c'est bon** : au point milieu, les erreurs de part et d'autre du milieu de chaque bande se compensent en partie.

Réponse. $\approx 3,14243$, soit une erreur d'environ 8×10^{-4} .

Correction de l'exercice 9 - Encadrer une intégrale

a) $x \mapsto x^2$ est **croissante** sur $[0; 1]$: les rectangles de gauche sont sous la courbe, ceux de droite au-dessus. Donc $0,218 75 \leq I \leq 0,468 75$ (et en effet $I = \frac{1}{3}$).

b) L'écart entre les deux sommes est une somme télescopique :

$$D - G = h(f(1) - f(0)) = \frac{1}{n} \times (1 - 0) = \frac{1}{n}$$

- $\frac{1}{n} < 10^{-2} \Leftrightarrow n > 100$: il faut au moins 101 **rectangles**.
- **Contrôle** : pour $n = 4$, $D - G = 0,25$, et $0,468 75 - 0,218 75 = 0,25$ ✓

Réponse. a) f croissante · b) $n \geq 101$.

Correction de l'exercice 10 - Balayage contre dichotomie

Balayage : il faut parcourir jusqu'à $\frac{1}{0,001} = 1\,000$ points dans le pire des cas (solution près de 1).

Dichotomie : il faut n étapes avec

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2} \approx 9,97$$

soit 10 étapes, chacune demandant une évaluation de $f(m)$ (plus $f(a)$, que l'on peut garder en mémoire).

- **Bilan** : environ 10 évaluations contre 1 000. Pour 10^{-6} : 20 contre 1 000 000.
- **Principe** : le coût du balayage est proportionnel à $\frac{1}{e}$, celui de la dichotomie à $\ln \frac{1}{e}$.

Réponse. 1 000 évaluations contre 10.

Correction de l'exercice 11 - Calculer $\ln 5$ par dichotomie

a) f est continue et strictement croissante ; $f(1) = e - 5 \approx -2,28 < 0$ et $f(2) = e^2 - 5 \approx 2,39 > 0$.

$$e^1 < 5 < e^2 \Rightarrow 1 < \ln 5 < 2$$

b) L'algorithme donne $1,609\,375 < \ln 5 < 1,610\,35$, et en effet $\ln 5 \approx 1,609\,44$ ✓

- **Intérêt** : c'est ainsi (avec des méthodes plus rapides) que les calculatrices peuvent évaluer un logarithme en ne sachant calculer que des exponentielles.
- **Nombre d'étapes** : 10 (amplitude $\frac{1}{1\,024} < 10^{-3}$).

Réponse. $1,609375 < \ln 5 < 1,61035$ ($\ln 5 \approx 1,60944$).

Correction de l'exercice 12 - Aire entre deux courbes

a) Sur $[0; 1]$, $\sqrt{x} \geq x^2$. L'aire vaut

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b) L'approximation 0,333 40 est très proche de $\frac{1}{3} \approx 0,333\,33$ (erreur $\approx 7 \times 10^{-5}$).

- **Script** : il suffit d'appliquer la fonction *milieu* à $f(x) = \sqrt{x} - x^2$.
- **Remarque** : la racine carrée a une tangente verticale en 0, ce qui dégrade un peu la précision près de 0 ; la méthode reste efficace.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) erreur $\approx 7 \times 10^{-5}$.

Correction de l'exercice 13 - Valeur moyenne approchée

La valeur moyenne est $\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx$; on réutilise la fonction *milieu* :

```
from math import sin, pi

print(milieu(sin, 0, pi, 100) / pi)
```

Le script affiche environ 0,636 65.

Valeur exacte :

$$\mu = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \approx 0,636\,62$$

- Écart d'environ 3×10^{-5} .
- **Méthode** : on combine deux briques (intégrale approchée, puis division par la longueur de l'intervalle).

Réponse. $\approx 0,63665$ contre $\frac{2}{\pi} \approx 0,63662$.

Correction de l'exercice 14 - Une intégrale sans primitive

a) Sur $[0; 1]$, $t^2 \in [0; 1]$, donc $e^{-t^2} \in [e^{-1}; 1]$. En intégrant sur un intervalle de longueur 1 :

$$e^{-1} \leq F(1) \leq 1 \quad \text{soit} \quad 0,368 \leq F(1) \leq 1$$

b) 0,746 83 est bien dans cet encadrement ✓ (la valeur exacte est $F(1) \approx 0,746 82$).

— **Intérêt** : quand aucune primitive n'est disponible, les méthodes numériques sont le seul moyen de calculer l'intégrale — c'est le cas de cette fonction, essentielle en probabilités (loi normale).

Réponse. a) $e^{-1} \leq F(1) \leq 1$ · b) oui, $F(1) \approx 0,7468$.

Correction de l'exercice 15 - Vitesse de convergence des rectangles

a) Erreurs $I - G_n$:

— $n = 10 : 0,048 3$; $n = 20 : 0,024 6$; $n = 40 : 0,012 4$.

L'erreur est **divisée par 2** quand n double : elle est proportionnelle à $\frac{1}{n}$. Plus précisément,

$$I - G_n \approx \frac{f(1) - f(0)}{2n} = \frac{1}{2n}$$

($\frac{1}{20} = 0,05$ pour $n = 10$, proche de 0,048).

b) $\frac{1}{2n} < 10^{-4} \Leftrightarrow n > 5\,000$: il faut environ 5 000 **rectangles**.

— **Comparaison** : le point milieu, dont l'erreur est divisée par 4 quand n double, atteint la même précision avec une trentaine de rectangles seulement.

Réponse. a) erreur divisée par 2 · b) environ 5 000 rectangles.