Plaquette 1 – Suites et boucles for

Algorithmique et Python — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Boucle for : *for k in range(n)* fait prendre à k les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$ (soit n tours) ; *range(a, b)* va de a à $b-1$.

Terme d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$: on part de u_0 et on applique f exactement n fois.

```
u = u0
for k in range(n):
    u = f(u)
```

Somme $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$: on initialise S à 0, puis on ajoute a_k à chaque tour.

Produit (factorielle) : on initialise à 1, puis on multiplie.

Listes : *L.append(x)* ajoute x à la fin ; *[f(k) for k in range(n)]* construit la liste des $f(k)$.

Deux variables mises à jour ensemble : *a, b = b, a + b* (affectation simultanée).

Vérifier un script : dresser le tableau des valeurs des variables à chaque tour, et comparer à une formule connue.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Correction de l'exercice 1 – Suivre une boucle tour par tour

On dresse le tableau des valeurs : la boucle fait 5 **tours** (i vaut 0, 1, 2, 3, 4).

Tour	avant	$u \leftarrow 2u-1$
$i=0$	3	5
$i=1$	5	9
$i=2$	9	17
$i=3$	17	33
$i=4$	33	65

Le script affiche 65 : c'est le terme u_5 de la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

— **Vérification** : $v_n = u_n - 1$ vérifie $v_{n+1} = 2v_n$, donc $v_n = 2 \times 2^n$ et

$$u_n = 2^{n+1} + 1 \qquad u_5 = 64 + 1 = 65 \ \checkmark$$

Réponse. 65, c'est-à-dire u_5.

Correction de l'exercice 2 – Programmer le calcul d'un terme

a) On applique n fois la relation de récurrence :

```
def suite(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = 0.5 * u + 4
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
    return u
```

b) *suite(0)* renvoie 1 (aucun tour), puis 4,5 ; 6,25 ; 7,125.

— Pour $n = 20$, on obtient environ 7,999 993 : la suite semble **converger vers** 8.

— **Justification** : 8 est le point fixe ($\ell = 0{,}5\ell + 4 \Leftrightarrow \ell = 8$), et

$$u_n - 8 = 0{,}5^n(u_0 - 8) = -7 \times 0{,}5^n \to 0$$

Réponse. a) Boucle *for* de n tours · b) 1 ; 4,5 ; 6,25 ; 7,125 ; limite 8.

Correction de l'exercice 3 – Une liste par compréhension

La liste contient les valeurs de l'expression pour $n = 0, 1, \ldots, 5$ (*range(6)* s'arrête à 5) :

$$u_n = n^2 - 3n$$

— $u_0 = 0$, $u_1 = -2$, $u_2 = -2$, $u_3 = 0$, $u_4 = 4$, $u_5 = 10$.

Donc *L = [0, -2, -2, 0, 4, 10]*.

— C'est une suite **explicite** : chaque terme se calcule directement à partir de n, sans connaître le précédent.

— **Remarque** : en Python, la puissance n^2 se note avec une **double étoile** ; l'accent circonflexe désigne une autre opération (le « ou exclusif »).

Réponse. *[0, -2, -2, 0, 4, 10]*.

Correction de l'exercice 4 – Somme des carrés

On initialise la somme à 0 et on ajoute k^2 pour k allant de 1 à 100 :

```
S = 0
for k in range(1, 101):
    S = S + k**2
print(S)
```

Le script affiche 338 350.

— **Vérification** par la formule :

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = \frac{100 \times 101 \times 201}{6} = \frac{2\,030\,100}{6} = 338\,350 \ \checkmark$$

— **Piège** : *range(1, 100)* s'arrêterait à 99 ; il faut *range(1, 101)*.

Réponse. $S = 338\,350$.

Correction de l'exercice 5 – Somme d'une suite géométrique

La boucle ajoute $0{,}5^k$ pour $k = 0, 1, \ldots, 10$ (11 termes) :

$$S = \sum_{k=0}^{10} 0{,}5^k = \frac{1 - 0{,}5^{11}}{1 - 0{,}5} = 2\left(1 - 0{,}5^{11}\right) = 2 - 0{,}5^{10}$$

— Valeur exacte : $2 - \dfrac{1}{1\,024} = \dfrac{2\,047}{1\,024} = 1{,}999\,023\,437\,5$.

— Le script affiche 1.9990234375.

— **Interprétation** : en augmentant le nombre de termes, la somme se rapproche de 2 sans l'atteindre.

Réponse. $2 - \dfrac{1}{1\,024} = 1{,}9990234375$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Construire la liste des termes

À chaque tour, on ajoute le terme suivant, calculé à partir du **dernier** élément de la liste (*L[-1]*) :

```
def termes(n):
    L = [0]
    for k in range(n):
        L.append(L[-1] + 2*k + 1)
    return L
```

termes(6) renvoie $[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36]$: ce sont les **carrés**.

$$u_n = n^2$$

— **Justification** : $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$; la relation de récurrence ajoute exactement l'écart entre deux carrés consécutifs.

Réponse. On ajoute $u_k + 2k + 1$ avec *append* ; on obtient les carrés n^2.

Correction de l'exercice 7 – La suite de Fibonacci

a) On part de $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, et chaque tour calcule le terme suivant de la **suite de Fibonacci** :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

— Après k tours, a vaut F_k et b vaut F_{k+1}. L'affectation **simultanée** est essentielle : avec deux lignes séparées, on perdrait l'ancienne valeur de a.

b) Après 10 tours : $a = F_{10} = 55$ et $b = F_{11} = 89$.

— Le script affiche 55 et $\frac{89}{55} \approx 1{,}618$: le quotient de deux termes consécutifs approche le **nombre d'or** $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

Réponse. b) 55 et ≈ 1,618 (nombre d'or).

Correction de l'exercice 8 – Trouver l'erreur

range(1, n) fait varier k de 1 à $n - 1$: le dernier terme, n, est **oublié**. Pour $n = 10$, on obtient $1 + \cdots + 9 = 45$.

Correction : remplacer par *range(1, n + 1)*.

— **Vérification** : $1 + \cdots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$ ✓

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

— **Réflexe** : tester une fonction sur un cas où l'on connaît la réponse (ici $n = 10$, ou même $n = 1$, qui devrait renvoyer 1 et renvoie 0).

Réponse. Utiliser *range(1, n + 1)*.

Correction de l'exercice 9 – La factorielle

Pour un **produit**, on initialise à 1 (et non à 0) :

```
def fact(n):
    p = 1
    for k in range(2, n + 1):
        p = p * k
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
    return p
```

— *fact(10)* renvoie 3 628 800.

— Pour $n = 0$ ou $n = 1$, la boucle ne fait aucun tour et la fonction renvoie 1, conformément à la convention $0! = 1$.

$$n! = n \times (n-1)!$$

— **Ordre de grandeur** : $n!$ croît extrêmement vite ; $20! \approx 2{,}4 \times 10^{18}$.

Réponse. $10! = 3\,628\,800$.

Correction de l'exercice 10 – Coefficients binomiaux

On traduit la formule du cours :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

```
def binom(n, k):
    return fact(n) // (fact(k) * fact(n - k))
```

— *binom(10, 3)* renvoie $\dfrac{3\,628\,800}{6 \times 5\,040} = 120$.

— **Division entière** `//` : le résultat est un entier exact (la division « flottante » `/` donnerait 120.0).

— **Amélioration** : pour de grands n, il vaut mieux calculer $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, qui manipule des nombres plus petits.

Réponse. $\binom{10}{3} = 120$.

Correction de l'exercice 11 – Moyenne et variance d'une liste

On traduit les formules statistiques :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i} x_i \qquad V = \frac{1}{n}\sum_{i} (x_i - \overline{x})^2$$

```
def moyenne(L):
    s = 0
    for x in L:
        s = s + x
    return s / len(L)

def variance(L):
    m = moyenne(L)
    s = 0
    for x in L:
        s = s + (x - m)**2
    return s / len(L)
```

— Test : moyenne $\dfrac{40}{8} = 5$; écarts au carré $9, 1, 1, 1, 0, 0, 4, 16$, de somme 32, donc variance $\dfrac{32}{8} = 4$ et écart-type 2.

— **Remarque** : *for x in L* parcourt directement les **éléments** de la liste.

Réponse. Moyenne 5, variance 4.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Une récurrence d'ordre deux

a) Il faut garder **deux** termes consécutifs en mémoire :

```
u, v = 1, 1          # u = u_n, v = u_(n+1)
for i in range(5):
    u, v = v, v + 2*u
print(v)
```

Après 5 tours, v contient u_6 ; le script affiche 43.

b) À la main : $u_2 = 1 + 2 = 3$, $u_3 = 3 + 2 = 5$, $u_4 = 5 + 6 = 11$, $u_5 = 11 + 10 = 21$, $u_6 = 21 + 22 = 43$ ✓

— **Formule** : on peut montrer que $u_n = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$; pour $n = 6$, $\dfrac{128 + 1}{3} = 43$ ✓

Réponse. $u_6 = 43$.

Correction de l'exercice 13 – Approcher racine de deux

```
u = 1
for i in range(4):
    u = (u + 2/u) / 2
    print(u)
```

Valeurs affichées :

— $u_1 = 1{,}5$; $u_2 \approx 1{,}416\,667$; $u_3 \approx 1{,}414\,215\,686$; $u_4 \approx 1{,}414\,213\,562$.

Convergence : si la suite converge vers $\ell > 0$, alors

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \Leftrightarrow \ell^2 = 2 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{2}$$

— **Vitesse** : le nombre de décimales exactes **double** environ à chaque étape (1, 2, 5, puis 11 décimales) ; la méthode de Héron est extrêmement efficace.

Réponse. $u_4 \approx 1{,}414213562 \approx \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Un plan d'épargne

a) On applique 10 fois la relation $C_{n+1} = 1{,}02\,C_n + 100$:

```
C = 1000
for annee in range(10):
    C = C * 1.02 + 100
print(C)
```

Le script affiche environ 2 313,97.

b) La suite $C_n + 5\,000$ est géométrique de raison 1,02 (point fixe $-5\,000$), donc

$$C_n = 6\,000 \times 1{,}02^n - 5\,000 \qquad C_{10} = 6\,000 \times 1{,}02^{10} - 5\,000 \approx 2\,313{,}97$$ ✓

— **Interprétation** : sur les 2 000 € versés, environ 314 € proviennent des intérêts.

Réponse. $C_{10} \approx 2\,313{,}97$ €.

Correction de l'exercice 15 – Un tableau de valeurs

a) *range(-2, 3)* donne $x = -2, -1, 0, 1, 2$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

b) f est continue ; on repère les **changements de signe** :

— entre -2 et -1 : une solution ;
— en $x = 0$: $f(0) = 0$;
— entre 1 et 2 : une solution.

Par le calcul, $x^3 - 3x = x\left(x^2 - 3\right)$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73$$

— **Limite du balayage** : un pas de 1 ne voit que les changements de signe ; des racines rapprochées pourraient passer inaperçues.

Réponse. Trois solutions : $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).