

Plaquette 3 – Dichotomie, intégrales — algorithmes

Algorithmique et Python — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Deux familles d'algorithmes d'**approximation** : la **dichotomie**, qui encadre la solution d'une équation $f(x) = 0$ en coupant l'intervalle en deux à chaque étape (grâce au théorème des valeurs intermédiaires), et les **méthodes des rectangles, du point milieu et des trapèzes**, qui approchent une intégrale par une somme d'aires simples. On justifie la **correction** (pourquoi la valeur approche la bonne) et on mesure la **précision** en fonction du nombre d'étapes.

Exercice 1 – Faire tourner une dichotomie

On applique la dichotomie à $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1 ; 2]$.

- Justifier qu'il y a une solution dans $[1 ; 2]$.
- Faire les quatre premières étapes à la main et donner l'encadrement obtenu.

Exercice 2 – Combien d'étapes ?

On applique la dichotomie sur un intervalle de longueur 1.

- Quelle est l'amplitude de l'encadrement après n étapes ?
- Combien d'étapes faut-il pour une précision de 10^{-6} ?

Exercice 3 – Écrire la fonction de dichotomie

Écrire une fonction *dichotomie*(f, a, b, e) qui renvoie un encadrement d'amplitude au plus e d'une solution de $f(x) = 0$ sur $[a ; b]$, en supposant $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires. Justifier la condition utilisée.

Exercice 4 – Résoudre $\cos x = x$

On applique la fonction *dichotomie* à $f(x) = \cos x - x$ sur $[0 ; 1]$ avec $e = 10^{-3}$.

- Vérifier que les hypothèses sont satisfaites.
- La fonction renvoie (0,738 28 ; 0,739 26) après 10 étapes. Conclure.

Exercice 5 – Quand la dichotomie se trompe

On applique la dichotomie à $f(x) = x^2 - 1$ sur $[-2 ; 2]$.

- Que valent $f(-2)$ et $f(2)$? La condition de départ est-elle remplie ?
- Que se passe-t-il si on lance quand même l'algorithme ? Et sur $[0 ; 2]$?

Exercice 6 – Rectangles à gauche et à droite

On approche $I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ avec $n = 10$ rectangles.

- Écrire une fonction qui calcule la somme des rectangles à gauche, puis à droite.

b) Les résultats sont 0,718 8 et 0,668 8. Expliquer pourquoi ils encadrent $\ln 2$.

Exercice 7 - La méthode des trapèzes

Écrire une fonction *trapezes*(f, a, b, n) puis l'appliquer à $\int_0^1 e^x dx$ avec $n = 4$. Comparer à la valeur exacte.

Exercice 8 - Approcher π par une intégrale

On admet que $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$.

Écrire une fonction *milieu*(f, a, b, n) (méthode du point milieu) et l'appliquer avec $n = 10$. Commenter la précision.

Exercice 9 - Encadrer une intégrale

Soit $I = \int_0^1 x^2 dx$. Avec $n = 4$, les sommes à gauche et à droite valent 0,218 75 et 0,468 75.

- Pourquoi encadrent-elles I ?
- Combien faut-il de rectangles pour que l'encadrement ait une amplitude inférieure à 10^{-2} ?

Exercice 10 - Balayage contre dichotomie

Pour résoudre $f(x) = 0$ sur $[0 ; 1]$ avec une précision de 10^{-3} , on compare :

- un **balayage** : on teste $x = 0 ; 0,001 ; 0,002 ; \dots$ jusqu'au premier changement de signe ;
- la **dichotomie**.

Comparer le nombre d'évaluations de f dans le pire des cas.

Exercice 11 - Calculer $\ln 5$ par dichotomie

On cherche $\ln 5$ comme la solution de $e^x = 5$.

- Justifier qu'elle est dans $[1 ; 2]$.
- La fonction *dichotomie* appliquée à $f(x) = e^x - 5$ sur $[1 ; 2]$ avec $e = 10^{-3}$ renvoie (1,609 375 ; 1,610 35). Comparer à $\ln 5$.

Exercice 12 - Aire entre deux courbes

On veut calculer l'aire comprise entre les courbes de $\sqrt{x}$ et de x^2 sur $[0 ; 1]$.

- Écrire l'intégrale correspondante et calculer sa valeur exacte.
- La méthode du point milieu avec $n = 100$ donne 0,333 40. Commenter.

Exercice 13 - Valeur moyenne approchée

Écrire un script qui approche la valeur moyenne de la fonction sinus sur $[0; \pi]$ par la méthode du point milieu avec $n = 100$, et comparer à la valeur exacte.

Exercice 14 - Une intégrale sans primitive

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ n'a pas de primitive exprimable avec les fonctions usuelles. On veut approcher $F(1) = \int_0^1 e^{-t^2} dt$.

- a) Justifier que $e^{-1} \leq F(1) \leq 1$.
- b) Le point milieu avec $n = 100$ donne 0,746 83. Est-ce cohérent ?

Exercice 15 - Vitesse de convergence des rectangles

Pour $I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, la méthode des rectangles à gauche donne :

n	10	20	40
somme	0,285 0	0,308 75	0,320 94

- a) Calculer l'erreur pour chaque n . Comment évolue-t-elle quand n double ?
- b) Estimer le nombre de rectangles nécessaires pour une erreur inférieure à 10^{-4} .