Plaquette 4 – Simulations probabilistes en Python

Algorithmique et Python — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Simuler, c'est faire produire par l'ordinateur des résultats **aléatoires** qui suivent un modèle donné, puis **répéter** l'expérience un grand nombre de fois. D'après la loi des grands nombres, la **fréquence** observée approche la probabilité et la **moyenne** observée approche l'espérance. On confronte toujours le résultat simulé à un calcul exact quand il est possible, et on garde en tête la **fluctuation** (de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{N}}$).

Exercice 1 – Simuler un dé

On considère le script suivant.

```
from random import randint

N = 6000
c = 0
for i in range(N):
    if randint(1, 6) == 6:
        c = c + 1
print(c / N)
```

a) Que simule-t-il ? Quelle valeur approximative attend-on ?

b) Une exécution affiche 0,162. Est-ce anormal ?

Exercice 2 – Une variable de Bernoulli

a) Écrire une fonction *bernoulli(p)* qui renvoie 1 avec la probabilité p et 0 sinon.

b) Justifier que le test utilisé a bien la probabilité p.

Exercice 3 – Simuler une loi binomiale

En utilisant la fonction *bernoulli*, écrire une fonction *binomiale(n, p)* qui simule une variable de loi $B(n\,;p)$. On simule 10 000 fois $B(20\,;0{,}3)$ et la moyenne obtenue vaut 5,998. Commenter.

Exercice 4 – Estimer une probabilité par simulation

Écrire un script qui estime la probabilité que la somme de deux dés soit au moins égale à 10, puis calculer la valeur exacte.

Exercice 5 – Attendre le premier six

On considère la fonction suivante.

```
from random import randint

def premier6():
    n = 1
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
    while randint(1, 6) != 6:
        n = n + 1
    return n
```

a) Que renvoie-t-elle ?

b) La moyenne de 100 000 appels vaut environ 5,99. Quelle valeur théorique attend-on ?

Exercice 6 – Le paradoxe des anniversaires

Dans un groupe de 23 personnes, on veut estimer la probabilité qu'au moins deux aient le même jour d'anniversaire (365 jours équiprobables).

a) Compléter la fonction de simulation.

b) Calculer la valeur exacte et comparer à la simulation ($\approx 0{,}511$).

```
from random import randint

def anniversaire(k):
    J = [randint(1, 365) for i in range(k)]
    return ...
```

Exercice 7 – Simuler le problème de Monty Hall

Rappel : une voiture est derrière l'une de trois portes ; le joueur choisit la porte 1, l'animateur ouvre une porte perdante parmi les deux autres, et le joueur peut changer.

a) Expliquer pourquoi le joueur qui **change** gagne exactement quand la voiture n'est **pas** derrière la porte 1.

b) Écrire une simulation estimant la probabilité de gagner en changeant.

Exercice 8 – Compléter une collection

Chaque paquet de céréales contient une figurine parmi 6, au hasard. On note T le nombre de paquets à acheter pour avoir les 6.

a) Écrire une fonction qui simule T.

b) Une simulation donne une moyenne de 14,67. On admet que $E(T) = 6\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6}\right)$. Comparer.

Exercice 9 – La précision d'une simulation

On estime une probabilité $p \approx 0{,}5$ par la fréquence observée sur N simulations.

a) Calculer l'écart-type de la fréquence pour $N = 100$, $N = 10\,000$ et $N = 1\,000\,000$.

b) Combien de simulations faut-il pour gagner une décimale de précision ?

Exercice 10 – Simuler un dépistage

Une maladie touche 1 % de la population. Un test est positif chez 99 % des malades et chez 5 % des personnes saines.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Écrire une simulation qui estime la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

b) Comparer au calcul exact.

Exercice 11 – Un point au hasard dans un carré

On choisit un point $M(x\,;y)$ au hasard dans le carré $[0\,;1]^2$ avec x = *random()* et y = *random()*.

a) Quelle est la probabilité que M soit à une distance inférieure à 0,5 de l'origine ?

b) Écrire une simulation et commenter le résultat 0,195.

Exercice 12 – Moyenne et variance de random()

On génère 100 000 valeurs de *random()* ; leur moyenne vaut 0,500 2 et leur variance 0,083 6.

a) Quelle est l'espérance théorique d'une variable uniforme sur $[0\,;1]$?

b) On admet que sa variance vaut $\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$. La calculer et comparer.

Exercice 13 – Somme de deux nombres aléatoires

On tire deux nombres U et V avec *random()*, indépendamment.

a) Estimer par simulation $P(U+V<1)$ et $P(U+V<0{,}5)$ (on obtient 0,502 et 0,123).

b) Retrouver ces valeurs par un calcul d'aire dans le carré $[0\,;1]^2$.

Exercice 14 – Un jeu est-il équitable ?

Un jeu coûte 1 € : on lance deux dés et on reçoit 5 € si l'on obtient un double. Une simulation de 100 000 parties donne un gain moyen de $-0{,}157$ €.

a) Écrire le script correspondant.

b) Calculer l'espérance exacte du gain et conclure.

Exercice 15 – Fluctuation d'échantillonnage

On simule 10 000 échantillons de 100 lancers d'une pièce équilibrée et, pour chacun, on calcule la fréquence de « pile ». La proportion d'échantillons dont la fréquence est dans $[0{,}4\,;0{,}6]$ vaut 0,960.

a) Écrire le script.

b) Comparer avec la probabilité exacte $P(40\le X\le 60)\approx 0{,}965$ pour $X\sim B(100\,;0{,}5)$, et avec le minorant donné par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).