

Plaquette 4 – Simulations probabilistes en Python

Algorithmique et Python – Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Simuler, c'est faire produire par l'ordinateur des résultats **aléatoires** qui suivent un modèle donné, puis **répéter** l'expérience un grand nombre de fois. D'après la loi des grands nombres, la **fréquence** observée approche la probabilité et la **moyenne** observée approche l'espérance. On confronte toujours le résultat simulé à un calcul exact quand il est possible, et on garde en tête la **fluctuation** (de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{N}}$).

Exercice 1 – Simuler un dé

On considère le script suivant.

```
from random import randint

N = 6000
c = 0
for i in range(N):
    if randint(1, 6) == 6:
        c = c + 1
print(c / N)
```

- Que simule-t-il ? Quelle valeur approximative attend-on ?
- Une exécution affiche 0,162. Est-ce anormal ?

Exercice 2 – Une variable de Bernoulli

- Écrire une fonction *bernoulli*(*p*) qui renvoie 1 avec la probabilité *p* et 0 sinon.
- Justifier que le test utilisé a bien la probabilité *p*.

Exercice 3 – Simuler une loi binomiale

En utilisant la fonction *bernoulli*, écrire une fonction *binomiale*(*n*, *p*) qui simule une variable de loi $B(n; p)$. On simule 10 000 fois $B(20; 0,3)$ et la moyenne obtenue vaut 5,998. Commenter.

Exercice 4 – Estimer une probabilité par simulation

Écrire un script qui estime la probabilité que la somme de deux dés soit au moins égale à 10, puis calculer la valeur exacte.

Exercice 5 – Attendre le premier six

On considère la fonction suivante.

```
from random import randint

def premier6():
    n = 1
```

```
while randint(1, 6) != 6:
    n = n + 1
return n
```

- Que renvoie-t-elle ?
- La moyenne de 100 000 appels vaut environ 5,99. Quelle valeur théorique attend-on ?

Exercice 6 - Le paradoxe des anniversaires

Dans un groupe de 23 personnes, on veut estimer la probabilité qu'au moins deux aient le même jour d'anniversaire (365 jours équiprobables).

- Compléter la fonction de simulation.
- Calculer la valeur exacte et comparer à la simulation ($\approx 0,511$).

```
from random import randint

def anniversaire(k):
    J = [randint(1, 365) for i in range(k)]
    return ...
```

Exercice 7 - Simuler le problème de Monty Hall

Rappel : une voiture est derrière l'une de trois portes ; le joueur choisit la porte 1, l'animateur ouvre une porte perdante parmi les deux autres, et le joueur peut changer.

- Expliquer pourquoi le joueur qui **change** gagne exactement quand la voiture n'est **pas** derrière la porte 1.
- Écrire une simulation estimant la probabilité de gagner en changeant.

Exercice 8 - Compléter une collection

Chaque paquet de céréales contient une figurine parmi 6, au hasard. On note T le nombre de paquets à acheter pour avoir les 6.

- Écrire une fonction qui simule T .
- Une simulation donne une moyenne de 14,67. On admet que $E(T) = 6 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{6} \right)$. Comparer.

Exercice 9 - La précision d'une simulation

On estime une probabilité $p \approx 0,5$ par la fréquence observée sur N simulations.

- Calculer l'écart-type de la fréquence pour $N = 100$, $N = 10\,000$ et $N = 1\,000\,000$.
- Combien de simulations faut-il pour gagner une décimale de précision ?

Exercice 10 - Simuler un dépistage

Une maladie touche 1 % de la population. Un test est positif chez 99 % des malades et chez 5 % des personnes saines.

- a) Écrire une simulation qui estime la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.
- b) Comparer au calcul exact.

Exercice 11 – Un point au hasard dans un carré

On choisit un point $M(x; y)$ au hasard dans le carré $[0; 1]^2$ avec $x = \text{random}()$ et $y = \text{random}()$.

- a) Quelle est la probabilité que M soit à une distance inférieure à 0,5 de l'origine ?
- b) Écrire une simulation et commenter le résultat 0,195.

Exercice 12 – Moyenne et variance de $\text{random}()$

On génère 100 000 valeurs de $\text{random}()$; leur moyenne vaut 0,500 2 et leur variance 0,083 6.

- a) Quelle est l'espérance théorique d'une variable uniforme sur $[0; 1]$?
- b) On admet que sa variance vaut $\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$. La calculer et comparer.

Exercice 13 – Somme de deux nombres aléatoires

On tire deux nombres U et V avec $\text{random}()$, indépendamment.

- a) Estimer par simulation $P(U + V < 1)$ et $P(U + V < 0,5)$ (on obtient 0,502 et 0,123).
- b) Retrouver ces valeurs par un calcul d'aire dans le carré $[0; 1]^2$.

Exercice 14 – Un jeu est-il équitable ?

Un jeu coûte 1 € : on lance deux dés et on reçoit 5 € si l'on obtient un double. Une simulation de 100 000 parties donne un gain moyen de $-0,157$ €.

- a) Écrire le script correspondant.
- b) Calculer l'espérance exacte du gain et conclure.

Exercice 15 – Fluctuation d'échantillonnage

On simule 10 000 échantillons de 100 lancers d'une pièce équilibrée et, pour chacun, on calcule la fréquence de « pile ». La proportion d'échantillons dont la fréquence est dans $[0,4; 0,6]$ vaut 0,960.

- a) Écrire le script.
- b) Comparer avec la probabilité exacte $P(40 \leq X \leq 60) \approx 0,965$ pour $X \sim B(100; 0,5)$, et avec le minorant donné par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.