

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse :
seuils, dichotomie, simulations et intégrales
Algorithmique et Python — Terminale spé maths
Exercices

Méthode

On écrit et on **lit** des scripts Python : boucles de **seuil**, **dichotomie**, **sommes de Riemann**, **simulations** de lois et méthode de **Monte-Carlo**, en justifiant à chaque fois la **terminaison** et la **correction** de l'algorithme.

Exercice 1 - Lecture d'une boucle de seuil

Que renvoie ce script ?

```
n = 0
u = 100.0
while u > 1:
    u = u * 0.8
    n = n + 1
print(n)
```

Exercice 2 - Écrire une boucle de seuil

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1,05u_n + 3$. Écrire un script qui renvoie le premier rang tel que $u_n > 200$.

Exercice 3 - Dichotomie

Compléter ce script de dichotomie pour résoudre $x^3 + x - 3 = 0$ sur $[1 ; 2]$ à 10^{-3} près, et donner le nombre d'étapes.

```
def f(x):
    return x**3 + x - 3

a, b = 1, 2
while b - a > 0.001:
    m = (a + b) / 2
    if f(a) * f(m) <= 0:
        b = m
    else:
        a = m
print(a, b)
```

Exercice 4 - Somme de Riemann

Écrire un script calculant une approximation de $\int_0^1 x^2 dx$ par rectangles à gauche avec $n = 100$, puis comparer à la valeur exacte.

Exercice 5 – Simulation d’une loi de Bernoulli

Écrire une fonction qui simule n épreuves de Bernoulli de paramètre p et renvoie le nombre de succès. Que simule-t-on ainsi ?

Exercice 6 – Monte-Carlo et estimation de π

Expliquer pourquoi ce script estime π , et donner l’ordre de grandeur de l’erreur pour $N = 10^6$.

```
from random import random

N = 1000000
c = 0
for i in range(N):
    x, y = random(), random()
    if x*x + y*y <= 1:
        c = c + 1
print(4 * c / N)
```

Exercice 7 – Recherche du maximum d’une liste

Écrire une fonction renvoyant le maximum d’une liste de nombres, sans utiliser *max*. Quel est son coût ?

Exercice 8 – Suite de Syracuse

Écrire un script qui, pour un entier u_0 donné, compte le nombre d’étapes nécessaires pour atteindre 1 par la règle : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si u_n est pair, $3u_n + 1$ sinon. Tester avec $u_0 = 7$.

Exercice 9 – Calcul d’une somme

Que renvoie ce script ? Donner la valeur exacte.

```
s = 0
for k in range(1, 11):
    s = s + 1 / (k * (k + 1))
print(s)
```

Exercice 10 – Simulation d’une marche aléatoire

Écrire un script simulant une marche aléatoire de n pas sur $\mathbb{Z}$ (chaque pas valant $+1$ ou -1 de façon équiprobable) et renvoyant la position finale. Quelle est l’espérance de cette position ? Son écart type pour $n = 100$?

Exercice 11 – Méthode d’Euler

Écrire un script appliquant la méthode d’Euler à $y' = y$ avec $y(0) = 1$ sur $[0; 1]$, avec $n = 10$ pas. Comparer le résultat à e .

Exercice 12 - Test de primalité

Écrire une fonction testant si un entier $n \geq 2$ est premier, en n'essayant les diviseurs que jusqu'à $\sqrt{n}$. Justifier cette borne.

Exercice 13 - Simulation et fréquence

Un script simule 10 000 lancers de deux dés et compte les sommes égales à 7. Quelle fréquence attendre ? Quel écart type ?

```
from random import randint

c = 0
for i in range(10000):
    if randint(1, 6) + randint(1, 6) == 7:
        c = c + 1
print(c / 10000)
```

Exercice 14 - Recherche par balayage

Écrire un script qui détermine, par balayage de pas 0,01, une valeur approchée de la solution de $e^x = 3x$ sur $[0; 1]$.

Exercice 15 - Comparaison de deux algorithmes

Pour trouver un seuil sur la suite $u_n = 0,9^n$, comparer le coût d'une boucle *while* et celui d'un calcul par logarithme.

Exercice 16 - Synthèse : intégrale et suite

On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

- Écrire un script calculant I_n par la méthode des trapèzes avec 100 subdivisions.
- Montrer que (I_n) est décroissante et positive.
- Encadrer I_n et déterminer sa limite.