

Plaquette 3 - Calcul d'intégrales par primitives

Calcul intégral — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème fondamental. Si f est continue sur $[a; b]$ et F est une primitive de f :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie (la constante s'élimine).

Primitives utiles : $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $\frac{1}{x} \rightarrow \ln x$; $e^{ax} \rightarrow \frac{1}{a}e^{ax}$; $\cos x \rightarrow \sin x$; $\sin x \rightarrow -\cos x$;
 $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u$; $u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$.

Aire entre deux courbes. Si $f \geq g$ sur $[a; b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes vaut

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Les bornes sont souvent les **abscisses des points d'intersection** ($f(x) = g(x)$).

Aire et signe : si $f \leq 0$ sur $[a; b]$, l'aire vaut $-\int_a^b f$. Si f change de signe, on découpe (Chasles).

Fonction définie par une intégrale : $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f nulle en a .

Correction de l'exercice 1 - Un polynôme

On écrit une primitive, puis on calcule $F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$- I = [x^3 - x^2 + x]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6.$$

$$- J = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} - 2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4} - 2 - 2 \right) = \frac{1}{4} - \left(-\frac{15}{4} \right) = 4.$$

$$- \text{Contrôle de } J \text{ par la parité : } x^3 - 4x \text{ est impaire (contribution nulle), il reste } \int_{-1}^1 2 dx = 4 \checkmark$$

— **Piège :** oublier les parenthèses autour de $F(-1)$ et se tromper de signe.

Réponse. $I = 6$ et $J = 4$.

Correction de l'exercice 2 - Inverses et racines

On utilise les primitives usuelles sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x} \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x} \rightarrow \ln x$$

$$a) [2\sqrt{x}]_1^4 = 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2.$$

$$b) \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$$

c) $[2 \ln x]_1^3 = 2 \ln 3 - 2 \ln 1 = 2 \ln 3 \approx 2,197$.

- **Cohérence des signes** : les trois fonctions sont positives et les bornes dans l'ordre croissant, les intégrales sont positives ✓
- **Piège en b)** : $-\frac{1}{2} - (-1)$ vaut $+\frac{1}{2}$; bien gérer le double signe moins.

Réponse. a) 2 · b) $\frac{1}{2}$ · c) $2 \ln 3$.

Correction de l'exercice 3 - Fonctions trigonométriques

Primitives : $\cos x \rightarrow \sin x$, $\sin x \rightarrow -\cos x$, et

$$\cos(ax + b) \rightarrow \frac{1}{a} \sin(ax + b)$$

a) $[\sin x]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$.

b) $[-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$.

c) $\left[\frac{1}{2} \sin(2x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

- **Interprétation de b)** : l'aire sous une arche de sinus vaut exactement 2 u.a.
- **Piège en b)** : $-\cos \pi = -(-1) = 1$; les signes s'accumulent, il faut écrire chaque étape.

Réponse. a) 1 · b) 2 · c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4 - Une exponentielle décroissante

Une primitive de e^{-2x} est $-\frac{1}{2}e^{-2x}$:

$$I = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{1-e^{-2}}{2} \approx 0,432$$

- De même, $J = \frac{1-e^{-2a}}{2}$.
- Quand $a \rightarrow +\infty$, $e^{-2a} \rightarrow 0$, donc $J \rightarrow \frac{1}{2}$.
- **Interprétation** : l'aire sous la courbe de e^{-2x} sur $[0; +\infty[$ est **finie** et vaut $\frac{1}{2}$, bien que le domaine soit infiniment long — la courbe se rapproche très vite de l'axe.

Réponse. $I = \frac{1-e^{-2}}{2}$; $J \rightarrow \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Une puissance de fonction affine

Forme composée : $u = 2x + 1$, $u' = 2$, donc $(2x + 1)^3 = \frac{1}{2} \times u' u^3$ a pour primitive

$$\frac{1}{2} \times \frac{u^4}{4} = \frac{(2x + 1)^4}{8}.$$

$$\int_0^1 (2x + 1)^3 dx = \left[\frac{(2x + 1)^4}{8}\right]_0^1 = \frac{81 - 1}{8} = 10$$

En développant : $(2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$, de primitive $2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x$:

- valeur en 1 : $2 + 4 + 3 + 1 = 10$; en 0 : 0. Résultat : 10 ✓
- **Comparaison** : la forme composée est plus rapide, surtout pour de grands exposants ($(2x + 1)^{10}$ serait pénible à développer).

Réponse. 10.

Correction de l'exercice 6 - Logarithme sur x

Avec $u = \ln x$ et $u' = \frac{1}{x}$:

$$\frac{\ln x}{x} = u'u \rightarrow \frac{u^2}{2} \quad \frac{1}{x \ln x} = \frac{u'}{u} \rightarrow \ln u$$

$$- \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$- \text{Sur } [e; e^2], \ln x \geq 1 > 0 : \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

$$- \text{Contrôle : } \ln(\ln e^2) = \ln 2 \text{ et } \ln(\ln e) = \ln 1 = 0 \checkmark$$

Réponse. $\frac{1}{2}$ et $\ln 2$.

Correction de l'exercice 7 - Une racine composée

On reconnaît, avec $u = x^2 + 5 > 0$ et $u' = 2x$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u} = \sqrt{x^2 + 5}$$

Donc :

$$- \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} dx = \left[\sqrt{x^2 + 5} \right]_0^2 = \sqrt{9} - \sqrt{5} = 3 - \sqrt{5} \approx 0,764.$$

$$- \text{Vérification de la primitive : } (\sqrt{x^2 + 5})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} \checkmark$$

$$- \text{Ordre de grandeur : la fonction vaut 0 en 0 et } \frac{2}{3} \text{ en 2 ; une intégrale d'environ 0,76 sur un intervalle de longueur 2 est plausible.}$$

Réponse. $3 - \sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 8 - Sinus fois cosinus carré

Avec $u = \cos x$, $u' = -\sin x$: $\sin x \cos^2 x = -u'u^2$, de primitive $-\frac{u^3}{3}$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx = \left[-\frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{0}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$- \text{Vérification de la primitive : } \left(-\frac{\cos^3 x}{3} \right)' = -\frac{3 \cos^2 x \times (-\sin x)}{3} = \sin x \cos^2 x \checkmark$$

$$- \text{Signe : sur } \left[0; \frac{\pi}{2} \right], \text{ la fonction est positive, le résultat aussi } \checkmark$$

Réponse. $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 9 - Aire entre une parabole et une droite

$$a) 4 - x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 : x = -2 \text{ ou } x = 1.$$

b) Sur $[-2; 1]$, la parabole est **au-dessus** de la droite (par exemple en 0 : $4 > 2$). L'aire vaut

$$A = \int_{-2}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$$

- Primitive : $2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.
- En 1 : $2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$; en -2 : $-4 - 2 + \frac{8}{3} = -\frac{10}{3}$.
- $A = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5$ u.a.
- **Méthode** : « courbe du haut moins courbe du bas », entre les intersections.

Réponse. Intersections en -2 et 1 ; aire $\frac{9}{2}$ u.a.

Correction de l'exercice 10 - Aire algébrique et aire géométrique

a) Calcul :

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$$

b) Le sinus est positif sur $[0; \pi]$ et négatif sur $[\pi; 2\pi]$. L'aire est la somme des aires des deux arches :

- $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$;
- $-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -[-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -(-1 - 1) = 2$.

Aire totale : 4 u.a.

- **À retenir** : l'intégrale est une aire **algébrique** (comptée négativement sous l'axe) ; pour l'aire géométrique, on intègre $|f|$ en découpant selon le signe.

Réponse. a) 0 · b) 4 u.a.

Correction de l'exercice 11 - Trouver une borne

a) Calcul :

$$A(x) = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

b) $A(x) = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2 \approx 7,39$.

c) $\int_0^a (2x + 1) dx = \left[x^2 + x \right]_0^a = a^2 + a$.

- $a^2 + a = 6 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a + 3) = 0$.
- $a > 0$, donc $a = 2$.

— **Contrôle de c)** : trapèze de côtés $f(0) = 1$ et $f(2) = 5$, hauteur 2 : $\frac{(1 + 5) \times 2}{2} = 6$ ✓

- **Méthode** : l'intégrale est une **fonction de la borne** ; on résout une équation dont l'inconnue est cette borne.

Réponse. a) $\ln x$ · b) $x = e^2$ · c) $a = 2$.

Correction de l'exercice 12 - Aire entre le logarithme et l'axe

Le logarithme est **négatif** sur $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ et **positif** sur $[1; e]$: on découpe en 1.

$$A = -\int_{1/e}^1 \ln x \, dx + \int_1^e \ln x \, dx$$

- $F(1) = -1$, $F(e) = e - e = 0$, $F\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1) - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}$.

$$- \int_1^e \ln x \, dx = 0 - (-1) = 1.$$

$$- \int_{1/e}^1 \ln x \, dx = -1 + \frac{2}{e}, \text{ donc sa contribution à l'aire est } 1 - \frac{2}{e}.$$

$$A = 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,26 \text{ u.a.}$$

Réponse. $A = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,26 \text{ u.a.}$

Correction de l'exercice 13 - Une fonction définie par une intégrale

a) Une primitive de e^{-t} est $-e^{-t}$:

$$G(x) = \left[-e^{-t} \right]_0^x = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}$$

b) $G'(x) = e^{-x} > 0$: G est **croissante** (normal, on ajoute de l'aire positive quand x augmente). On retrouve que $G' = f$, la fonction intégrée.

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1.$$

Interprétation : l'aire totale sous la courbe de e^{-t} sur $[0; +\infty[$ vaut 1. C'est pourquoi $t \mapsto e^{-t}$ peut servir de **densité de probabilité** (loi exponentielle, durée de vie d'un composant).

Réponse. $G(x) = 1 - e^{-x}$, croissante, limite 1.

Correction de l'exercice 14 - Distance d'un freinage

a) La distance est l'intégrale de la vitesse (positive). Primitive de $e^{-0,5t}$: $-2e^{-0,5t}$.

$$d = \int_0^4 10 e^{-0,5t} \, dt = \left[-20 e^{-0,5t} \right]_0^4 = -20e^{-2} + 20 = 20(1 - e^{-2}) \approx 17,3 \text{ m}$$

b) Sur $[0; T]$, la distance vaut $20(1 - e^{-0,5T})$, qui tend vers 20 m quand $T \rightarrow +\infty$.

— **Interprétation** : même si la vitesse n'est jamais exactement nulle dans ce modèle, la distance totale reste finie : le véhicule s'immobilise en pratique à 20 m.

— Au bout de 4 s, il a déjà parcouru 86 % de cette distance.

Réponse. a) $20(1 - e^{-2}) \approx 17,3 \text{ m}$ · b) 20 m.

Correction de l'exercice 15 - Aire entre l'exponentielle et une droite

La courbe de l'exponentielle est **au-dessus** de sa tangente ($e^x \geq x + 1$). L'aire vaut

$$A = \int_0^1 (e^x - x - 1) \, dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1$$

$$- \text{En } 1 : e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2} ; \text{ en } 0 : 1.$$

$$- A = e - \frac{3}{2} - 1 = e - \frac{5}{2} \approx 0,218 \text{ u.a.}$$

— **Interprétation** : ce petit domaine mesure l'**erreur** commise en remplaçant e^x par son approximation affine $1 + x$ sur $[0; 1]$.

Réponse. $A = e - \frac{5}{2} \approx 0,218 \text{ u.a.}$