

Plaquette 1 - Intégrale et aire d'une fonction positive

Calcul intégral — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Si f est continue et positive sur $[a; b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire, en unités d'aire (u.a.), du domaine

$$D = \{M(x; y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Unité d'aire : aire du rectangle de côtés les unités des deux axes.

Lien avec les primitives : si F est une primitive de f sur $[a; b]$,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

La fonction aire : $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Aires usuelles : rectangle $L \times l$; triangle $\frac{b \times h}{2}$; trapèze $\frac{(B + b) \times h}{2}$; disque πr^2 .

Méthode des rectangles : on découpe $[a; b]$ en n bandes de largeur $\frac{b-a}{n}$. Si f est croissante, les rectangles « sous » la courbe donnent un minorant, ceux « au-dessus » un majorant.

Positivité : si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ ($a \leq b$), alors $\int_a^b f \geq 0$; si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Correction de l'exercice 1 - Rectangle et triangle

Pour une fonction positive, l'intégrale est l'**aire sous la courbe** :

$$\int_a^b f(x) dx = \text{aire sous } C_f \text{ entre } a \text{ et } b$$

a) Le domaine est un **rectangle** de largeur 3 et de hauteur 2 : $\int_0^3 2 dx = 3 \times 2 = 6$.

b) Sous la droite $y = \frac{x}{2}$, entre 0 et 4, le domaine est un **triangle rectangle** de base 4 et de hauteur $\frac{4}{2} = 2$:

— aire = $\frac{4 \times 2}{2} = 4$, donc $\int_0^4 \frac{x}{2} dx = 4$.

— **Contrôle** avec une primitive : $\left[\frac{x^2}{4} \right]_0^4 = \frac{16}{4} - 0 = 4 \checkmark$

Réponse. a) 6 · b) 4.

Correction de l'exercice 2 - Un trapèze

Le domaine est un **trapèze** rectangle : ses côtés parallèles (verticaux) mesurent $f(1) = 2$ et $f(3) = 4$, et sa hauteur (horizontale) vaut $3 - 1 = 2$.

$$\text{aire} = \frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(4 + 2) \times 2}{2} = 6$$

Donc $\int_1^3 (x + 1) dx = 6$.

Vérification avec la primitive $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$:

$$- F(3) - F(1) = \left(\frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = 7,5 - 1,5 = 6 \quad \checkmark$$

— **Remarque** : pour une fonction affine, l'intégrale vaut $(b - a) \times \frac{f(a) + f(b)}{2}$: la largeur fois la moyenne des valeurs extrêmes.

Réponse. $\int_1^3 (x + 1) dx = 6$.

Correction de l'exercice 3 - Un demi-disque

a) Un point $M(x; y)$ de la courbe vérifie $y = \sqrt{4 - x^2}$, donc $y \geq 0$ et

$$y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

C'est l'équation du cercle de centre O et de rayon 2 ; avec $y \geq 0$, on n'en garde que la **moitié supérieure**.

b) L'intégrale est l'aire du **demi-disque** de rayon 2 :

$$- \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{\pi \times 2^2}{2} = 2\pi \approx 6,28.$$

— **Intérêt** : on ne connaît pas de primitive simple de f , mais la géométrie donne directement le résultat.

Réponse. Demi-cercle de centre O , rayon 2 ; l'intégrale vaut 2π .

Correction de l'exercice 4 - Avec une valeur absolue

$|x| \geq 0$: l'intégrale est une aire. Le domaine est formé de **deux triangles** rectangles isocèles, de part et d'autre de l'axe des ordonnées :

— à gauche, entre -1 et 0 : base 1, hauteur 1, aire $\frac{1}{2}$;

— à droite, entre 0 et 2 : base 2, hauteur 2, aire $\frac{2 \times 2}{2} = 2$.

$$\int_{-1}^2 |x| dx = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

— **Méthode** : on découpe le domaine là où l'expression change (ici en 0) ; c'est la **relation de Chasles**.

— **Piège** : calculer $\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, en oubliant que $\frac{x^2}{2}$ n'est pas une primitive de $|x|$ sur $[-1; 0]$.

Réponse. $\int_{-1}^2 |x| dx = \frac{5}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Changer d'unité d'aire

a) L'unité d'aire est l'aire du rectangle construit sur les deux unités :

$$1 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm} \times 1,5 \text{ cm} = 3 \text{ cm}^2$$

b) L'intégrale mesure l'aire **en unités d'aire** : 3,5 u.a.

— En cm^2 : $3,5 \times 3 = 10,5 \text{ cm}^2$.

— **Piège** : répondre $3,5 \text{ cm}^2$. L'intégrale est un nombre sans unité ; sa conversion en cm^2 dépend du **choix des unités** du repère.

— **Cas d'un repère orthonormé** d'unité 1 cm : 1 u.a. = 1 cm², et l'intégrale donne directement l'aire en cm².

Réponse. a) 1 u.a. = 3 cm² · b) 10,5 cm².

Correction de l'exercice 6 - Encadrer avec des rectangles

La fonction $x \mapsto x^2$ est **croissante** sur $[0; 1]$. Sur chaque bande $[x_k; x_{k+1}]$, le rectangle de hauteur $f(x_k)$ est sous la courbe, celui de hauteur $f(x_{k+1})$ au-dessus.

a) **Sous la courbe** (hauteurs 0, 0,25², 0,5², 0,75²) :

$$s = 0,25 \left(0 + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} \right) = \frac{14}{64} \approx 0,219$$

Au-dessus (hauteurs 0,25², ..., 1²) : $S = 0,25 \times \frac{1 + 4 + 9 + 16}{16} = \frac{30}{64} \approx 0,469$.

b) $0,219 \leq I \leq 0,469$. Valeur exacte : $I = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0,333 \checkmark$

— L'écart $S - s = 0,25 \times (f(1) - f(0)) = 0,25$ se divise par 2 quand on double le nombre de bandes.

Réponse. $\frac{14}{64} \leq I \leq \frac{30}{64}$; $I = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 7 - Comparer deux intégrales

Pour $x \in [0; 1]$: $x^3 = x \times x^2 \leq 1 \times x^2$, car $0 \leq x \leq 1$ et $x^2 \geq 0$. Donc $x^3 \leq x^2$ sur $[0; 1]$.

Par **croissance de l'intégrale** (les bornes sont dans l'ordre $0 \leq 1$) :

$$f \leq g \text{ sur } [a; b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

donc $J \leq I$.

Vérification : $I = \frac{1}{3} \approx 0,333$ et $J = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} = 0,25 \checkmark$

— **Graphiquement** : sur $[0; 1]$, la courbe de x^3 est sous celle de x^2 , donc son domaine est plus petit.

— **Attention** : sur $[1; 2]$, c'est l'inverse ($x^3 \geq x^2$).

Réponse. $J \leq I$ ($\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$).

Correction de l'exercice 8 - La fonction aire

a) Le domaine sous $y = 2t$, entre 0 et x , est un **triangle** de base x et de hauteur $f(x) = 2x$:

$$A(x) = \frac{x \times 2x}{2} = x^2$$

b) $A'(x) = 2x = f(x)$: la fonction aire est une **primitive** de f , et c'est celle qui s'annule en 0.

— **C'est le théorème fondamental** : pour f continue, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable et a pour dérivée f .

— **Idée intuitive** : quand x augmente de h , l'aire augmente d'une fine bande de largeur h et de hauteur environ $f(x)$; donc $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x)$.

Réponse. $A(x) = x^2$ et $A'(x) = 2x = f(x)$.

Correction de l'exercice 9 - Estimer une aire sur une figure

a) **Estimation** : colonne par colonne (largeur 1), la hauteur moyenne de la courbe vaut environ la valeur au milieu : $f(0,5) = 1,0625$, $f(1,5) = 1,5625$, $f(2,5) = 2,5625$, $f(3,5) = 4,0625$ (méthode du « point milieu »).

— Total $\approx 9,25$ carreaux.

b) **Calcul exact** avec la primitive $F(x) = \frac{x^3}{12} + x$:

$$\int_0^4 f(x) dx = F(4) - F(0) = \frac{64}{12} + 4 = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3} \approx 9,33$$

— L'estimation par les milieux est très proche (erreur inférieure à 1 %).

— **Unité** : repère orthonormé, donc 1 carreau = 1 u.a.

Réponse. a) Environ 9,25 u.a. · b) $\frac{28}{3} \approx 9,33$ u.a.

Correction de l'exercice 10 - L'aire sous l'hyperbole

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et positive sur $[1; e^2]$; une primitive est $\ln$. Donc

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

L'aire vaut 1 u.a.

— Entre 1 et e^2 : $\ln(e^2) - \ln 1 = 2$ u.a.

— **Interprétation** : $\ln x$ est l'aire sous l'hyperbole entre 1 et x ; le nombre e est l'abscisse pour laquelle cette aire vaut exactement 1.

— **Remarque** : passer de e à e^2 multiplie la largeur par environ 4,6 mais n'ajoute qu'une unité d'aire, car la courbe se rapproche de l'axe.

Réponse. 1 u.a. entre 1 et e ; 2 u.a. entre 1 et e^2 .

Correction de l'exercice 11 - L'aire sous l'exponentielle

a) L'exponentielle est positive et est sa propre primitive :

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1 \approx 1,718$$

b) La fonction est **croissante** sur $[0; 1]$, donc $e^0 \leq e^x \leq e^1$, soit $1 \leq e^x \leq e$. En intégrant sur un intervalle de longueur 1 :

— $1 \times 1 \leq \int_0^1 e^x dx \leq e \times 1$.

— **Cohérence** : $1 \leq 1,718 \leq 2,718$ ✓

— **Interprétation** : le domaine est coincé entre le carré de hauteur 1 et le rectangle de hauteur e .

Réponse. a) $e - 1 \approx 1,72$ u.a. · b) $1 \leq e^x \leq e$ sur $[0; 1]$.

Correction de l'exercice 12 - Sous une parabole

Sur $[0; 2]$, $4 - x^2 \geq 0$ (car $x^2 \leq 4$) : l'intégrale est l'aire. Une primitive est $4x - \frac{x^3}{3}$:

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,33$$

- Le rectangle $[0; 2] \times [0; 4]$ a une aire de 8.
- Le domaine occupe donc $\frac{16/3}{8} = \frac{2}{3}$ du rectangle.
- **Culture** : Archimède savait déjà que l'aire sous un arc de parabole vaut les $\frac{2}{3}$ du rectangle (ou les $\frac{4}{3}$ du triangle inscrit) — deux mille ans avant le calcul intégral.

Réponse. $\frac{16}{3}$ u.a., soit les $\frac{2}{3}$ du rectangle.

Correction de l'exercice 13 - Distance et aire sous la vitesse

a) La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse (la position est une primitive de la vitesse). Le domaine est un **triangle** de base 4 s et de hauteur $v(4) = 12$ m/s :

$$d = \int_0^4 3t \, dt = \frac{4 \times 12}{2} = 24 \text{ m}$$

— **Vérification** : $\left[\frac{3t^2}{2} \right]_0^4 = 24 \checkmark$

b) Vitesse moyenne = $\frac{24}{4} = 6$ m/s.

- **Remarque** : c'est la moyenne des vitesses extrêmes $\frac{0+12}{2}$, car la vitesse est affine.
- **Unités** : l'aire a pour unité (m/s) $\times$ (s) = m, ce qui confirme qu'elle représente une distance.

Réponse. a) 24 m · b) 6 m/s.

Correction de l'exercice 14 - Sous la racine carrée

Vérification de la primitive (dérivée d'un produit, pour $x > 0$) :

$$F'(x) = \frac{2}{3} \left(\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{x} = \sqrt{x}$$

Aire ($\sqrt{x} \geq 0$) :

- $\int_0^9 \sqrt{x} \, dx = F(9) - F(0) = \frac{2}{3} \times 9 \times 3 - 0 = 18$ u.a.
- **Contrôle géométrique** : le domaine est contenu dans le rectangle $[0; 9] \times [0; 3]$ d'aire 27, et contient le triangle de sommets $(0; 0)$, $(9; 0)$, $(9; 3)$ d'aire 13,5 (la courbe, concave, est au-dessus de sa corde). $13,5 \leq 18 \leq 27 \checkmark$
- **Remarque** : ici encore le domaine occupe les $\frac{2}{3}$ du rectangle — la courbe de $\sqrt{x}$ est une demi-parabole couchée.

Réponse. 18 u.a.

Correction de l'exercice 15 - Encadrer une intégrale sans primitive

a) $x \mapsto -x^2$ est décroissante sur $[0; 1]$ et l'exponentielle est croissante : la composée est **décroissante**. Donc, pour $x \in [0; 1]$:

$$e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0 = 1$$

En intégrant sur $[0; 1]$ (longueur 1) : $e^{-1} \approx 0,368 \leq I \leq 1$.

b) Sur chaque demi-intervalle, la fonction décroissante est encadrée par ses valeurs aux bornes :

— minorant : $0,5(e^{-0,25} + e^{-1}) \approx 0,5(0,779 + 0,368) \approx 0,573$;

— majorant : $0,5(1 + e^{-0,25}) \approx 0,889$.

$0,573 \leq I \leq 0,889$; la valeur réelle est $I \approx 0,747$.

Réponse. a) $e^{-1} \leq I \leq 1$ · b) $0,573 \leq I \leq 0,889$.