Plaquette 4 – Intégration par parties et applications

Calcul intégral — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formule d'intégration par parties. Si u et v sont dérivables sur $[a\,;b]$, à dérivées continues :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

Elle découle de la dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, intégrée sur $[a\,;b]$.

Choix de u et v' :

Produit	u (à dériver)	v' (à primitiver)
$P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$	$P(x)$	e^{ax}
$P(x)\sin x$, $P(x)\cos x$	$P(x)$	$\sin x$, $\cos x$
$P(x)\ln x$	$\ln x$	$P(x)$
$\ln x$ seul	$\ln x$	1

Plusieurs fois : pour $x^2\mathrm{e}^x$, on fait deux intégrations par parties successives (le degré baisse de 1 à chaque fois).

Intégrales « qui reviennent » : pour $\mathrm{e}^x\sin x$, deux intégrations par parties font réapparaître l'intégrale de départ ; on la trouve en résolvant une équation.

Suites d'intégrales : l'intégration par parties donne souvent une **relation de récurrence** entre I_{n+1} et I_n.

Correction de l'exercice 1 – Polynôme fois exponentielle

On pose $u(x) = x$ (qui se simplifie en dérivant) et $v'(x) = \mathrm{e}^x$:

— $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\,\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1$$

— **Vérification** : $(x-1)\mathrm{e}^x$ a pour dérivée $\mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$; et $[(x-1)\mathrm{e}^x]_0^1 = 0 - (-1) = 1$ ✓

— **Mauvais choix** : avec $u = \mathrm{e}^x$ et $v' = x$, on obtiendrait $\int \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$, plus compliquée.

Réponse. $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$.

Correction de l'exercice 2 – Polynôme fois sinus

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin x$:

— $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos x$.

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x$$

— $[-x\cos x]_0^{\pi} = -\pi\cos\pi - 0 = \pi$;

— $\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi} = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Résultat : π.

— **Signe** : $x\sin x \geq 0$ sur $[0\,;\pi]$, l'intégrale est bien positive ✓

— **Piège** : le « moins » de la formule et celui de $v = -\cos x$ se combinent en un « plus » devant $\int \cos x$.

Réponse. π.

Correction de l'exercice 3 – Polynôme fois cosinus

On pose $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sin x$:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x$$

— $[x\sin x]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{2}\times 1 - 0 = \dfrac{\pi}{2}$;

— $\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 0 + 1 = 1$.

Résultat : $\dfrac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}571$.

— **Vérification** : la fonction $x\sin x + \cos x$ a pour dérivée $x\cos x$; entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, elle passe de 1 à $\dfrac{\pi}{2}$ ✓

Réponse. $\dfrac{\pi}{2} - 1$.

Correction de l'exercice 4 – Polynôme fois logarithme

Ici on **dérive le logarithme** (qui devient une fraction simple) et on primitive le polynôme : $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

— $\left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$;

— $\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}$.

Résultat : $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4} \approx 2{,}10$.

— **Règle** : avec un logarithme, c'est **lui** qu'on dérive — on ne connaît pas de primitive simple de $\ln x$ multiplié par autre chose.

Réponse. $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4} \approx 2{,}10$.

Correction de l'exercice 5 – Logarithme sur x carré

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

— $\left[-\dfrac{\ln x}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 0$;

— $\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Résultat : $1-\frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}264$.

— **Piège** : le produit $u'v = \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$; avec le « moins » de la formule, on obtient $+\int \frac{1}{x^2}$.

Réponse. $1-\frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}264$.

Correction de l'exercice 6 – Fonction affine fois exponentielle décroissante

On pose $u(x) = 2x+1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où $u'(x) = 2$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$:

$$\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-(2x+1)\mathrm{e}^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

— $[-(2x+1)\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = -3\mathrm{e}^{-1} + 1$;

— $\int_0^1 2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-2\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = -2\mathrm{e}^{-1} + 2$.

Résultat : $3-\frac{5}{\mathrm{e}} \approx 1{,}161$.

— **Vérification** : $F(x) = -(2x+3)\mathrm{e}^{-x}$ vérifie $F'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + (2x+3)\mathrm{e}^{-x} = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$ ✓, et $F(1) - F(0) = -\frac{5}{\mathrm{e}} + 3$ ✓

Réponse. $3-\frac{5}{\mathrm{e}} \approx 1{,}16$.

Correction de l'exercice 7 – Une primitive du logarithme

a) On pose $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$, d'où $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$:

$$L(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln x - 0 - (x-1) = x\ln x - x + 1$$

b) L est la primitive de ln qui s'annule en 1. En retirant la constante, $x \mapsto x\ln x - x$ est aussi une primitive de ln.

— **Vérification** : $(x\ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$ ✓

— **Astuce** : faire apparaître un facteur 1 invisible permet d'intégrer par parties une fonction qui n'est pas un produit.

Réponse. $L(x) = x\ln x - x + 1$; primitive de ln : $x\ln x - x$.

Correction de l'exercice 8 – Le carré du logarithme

On écrit $(\ln x)^2 = 1 \times (\ln x)^2$ et on pose $u(x) = (\ln x)^2$, $v'(x) = 1$:

— $u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2\ln x}{x}$ et $v(x) = x$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \Big[x(\ln x)^2\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$$

— Avec la donnée : $\mathrm{e} - 2 \times 1 = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$.

— **Observation** : l'intégration par parties a fait baisser la puissance du logarithme de 2 à 1 ; c'est le principe des relations de récurrence.

Réponse. $\mathrm{e} - 2$.

Correction de l'exercice 9 – Une intégrale qui revient

a) Dans I, on pose $u = \sin x$, $v' = \mathrm{e}^x$ ($u' = \cos x$, $v = \mathrm{e}^x$) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$I = [\mathrm{e}^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = 0 - J$$

(car $\sin \pi = \sin 0 = 0$).

b) Dans J, on pose $u = \cos x$, $v' = \mathrm{e}^x$ ($u' = -\sin x$) :

— $J = [\mathrm{e}^x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = (-\mathrm{e}^{\pi} - 1) + I$.

c) En remplaçant : $I = -J = \mathrm{e}^{\pi} + 1 - I$, donc $2I = \mathrm{e}^{\pi} + 1$ et

— $I = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{2} \approx 12{,}07$.

— **Méthode** : l'intégrale « revient » après deux intégrations par parties ; on la traite comme l'**inconnue d'une équation**.

Réponse. $I = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{2} \approx 12{,}07$.

Correction de l'exercice 10 – Une aire par parties

$f(x) \geq 0$ sur $[0\,;2]$: l'aire est l'intégrale. On pose $u = x$ et $v' = \mathrm{e}^{-x/2}$, d'où $u' = 1$ et $v = -2\mathrm{e}^{-x/2}$:

$$\int_0^2 x\,\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \Big[-2x\,\mathrm{e}^{-x/2}\Big]_0^2 + 2\int_0^2 \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x$$

— $\Big[-2x\,\mathrm{e}^{-x/2}\Big]_0^2 = -4\mathrm{e}^{-1}$;

— $2\int_0^2 \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = 2\Big[-2\mathrm{e}^{-x/2}\Big]_0^2 = 2\left(-2\mathrm{e}^{-1} + 2\right) = 4 - 4\mathrm{e}^{-1}$.

$$A = 4 - \frac{8}{\mathrm{e}} \approx 1{,}06 \text{ u.a.}$$

— **Contrôle** : la fonction atteint son maximum $2\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}74$ en $x = 2$; l'aire est inférieure à $2 \times 2\mathrm{e}^{-1} = 4\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}47$ ✓

Réponse. $A = 4 - \dfrac{8}{\mathrm{e}} \approx 1{,}06$ u.a.

Correction de l'exercice 11 – Une relation de récurrence

a) $I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$.

b) On pose $u = (\ln x)^{n+1}$, $v' = 1$; alors $u' = (n+1)\dfrac{(\ln x)^n}{x}$ et $v = x$:

$$I_{n+1} = \Big[x(\ln x)^{n+1}\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times (n+1)\frac{(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1)I_n$$

(car $\ln \mathrm{e} = 1$ et $\ln 1 = 0$).

c) On applique la relation de proche en proche :

— $I_1 = \mathrm{e} - I_0 = 1$;
— $I_2 = \mathrm{e} - 2I_1 = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$;
— $I_3 = \mathrm{e} - 3I_2 = 6 - 2\mathrm{e} \approx 0{,}563$.

— **Cohérence** : sur $[1\,;\mathrm{e}]$, $0 \leq \ln x \leq 1$, donc $(\ln x)^n$ décroît avec n : la suite doit décroître ✓

Réponse. $I_0 = \mathrm{e} - 1$, $I_1 = 1$, $I_2 = \mathrm{e} - 2$, $I_3 = 6 - 2\mathrm{e}$.

Correction de l'exercice 12 – Valeur moyenne du logarithme

Par définition :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mu = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\left[x\ln x - x\right]_1^{\mathrm{e}}$$

— $\left[x\ln x - x\right]_1^{\mathrm{e}} = (\mathrm{e}-\mathrm{e}) - (0-1) = 1$.

— $\mu = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1} \approx 0{,}582$.

— **Cohérence** : ln varie de 0 à 1 sur cet intervalle ; sa moyenne est entre les deux, un peu au-dessus de $\frac{1}{2}$ car la courbe est concave (elle « bombe » vers le haut) ✓

— **Interprétation** : le rectangle de base $[1\,;\mathrm{e}]$ et de hauteur 0,582 a la même aire (1 u.a.) que le domaine sous la courbe.

Réponse. $\mu = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1} \approx 0{,}582$.

Correction de l'exercice 13 – Distance parcourue

La distance est $\int_0^3 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ (vitesse positive). Intégration par parties avec $u = t$ et $v' = \mathrm{e}^{-t}$ ($u' = 1$, $v = -\mathrm{e}^{-t}$) :

$$\int_0^3 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^3 + \int_0^3 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -3\mathrm{e}^{-3} + \left(1-\mathrm{e}^{-3}\right) = 1 - 4\mathrm{e}^{-3}$$

— $d = 1 - 4\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}80$ m.

— **Limite** : sur $[0\,;T]$, la distance vaut $1-(T+1)\mathrm{e}^{-T}$, qui tend vers 1 m quand $T \to +\infty$ (croissances comparées).

— **Remarque** : la vitesse est maximale en $t = 1$ ($\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$ m/s) puis décroît vers 0.

Réponse. $d = 1 - 4\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}80$ m.

Correction de l'exercice 14 – Bien choisir u et v'

a) Avec $v' = \ln x$, il faudrait connaître $v = x\ln x - x$; l'intégrale restante serait $\int 2x(x\ln x - x)\,\mathrm{d}x$, **plus compliquée** que celle de départ.

b) On pose $u = \ln x$ et $v' = x^2$, d'où $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^3}{3}$:

$$K = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}}$$

— $K = \dfrac{\mathrm{e}^3}{3} - \dfrac{\mathrm{e}^3-1}{9} = \dfrac{3\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^3+1}{9} = \dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{9} \approx 4{,}57$.

— **Règle** : on dérive ce qui se simplifie ($\ln x$ devient $\frac{1}{x}$) et on intègre ce qui reste simple (x^2).

Réponse. $K = \dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{9} \approx 4{,}57$.

Correction de l'exercice 15 – Quand l'intégration par parties est inutile

a) On reconnaît des formes $u'\mathrm{e}^u$ et $u'\cos u$ avec $u = x^2$, $u' = 2x$:

$$x\,\mathrm{e}^{x^2} = \frac{1}{2}\times 2x\,\mathrm{e}^{x^2} \to \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} \qquad 2x\cos\left(x^2\right) \to \sin\left(x^2\right)$$

— $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2} \approx 0{,}859$.

— $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\sin\left(x^2\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \sin\pi - \sin 0 = 0$.

b) Avec $u = x$, il faudrait $v' = \mathrm{e}^{x^2}$, c'est-à-dire une primitive de e^{x^2} — qui ne s'exprime avec

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

aucune fonction usuelle.

— **Réflexe** : avant d'intégrer par parties, chercher une **forme composée** ; c'est beaucoup plus rapide quand elle existe.

Réponse. $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$ et 0, par formes composées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).