

Plaquette 4 - Intégration par parties et applications

Calcul intégral — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formule d'intégration par parties. Si u et v sont dérivables sur $[a; b]$, à dérivées continues :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

Elle découle de la dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, intégrée sur $[a; b]$.

Choix de u et v' :

Produit	u (à dériver)	v' (à primitiver)
$P(x) e^{ax}$	$P(x)$	e^{ax}
$P(x) \sin x, P(x) \cos x$	$P(x)$	$\sin x, \cos x$
$P(x) \ln x$	$\ln x$	$P(x)$
$\ln x$ seul	$\ln x$	1

Plusieurs fois : pour $x^2 e^x$, on fait deux intégrations par parties successives (le degré baisse de 1 à chaque fois).

Intégrales « qui reviennent » : pour $e^x \sin x$, deux intégrations par parties font réapparaître l'intégrale de départ ; on la trouve en résolvant une équation.

Suites d'intégrales : l'intégration par parties donne souvent une **relation de récurrence** entre I_{n+1} et I_n .

Correction de l'exercice 1 - Polynôme fois exponentielle

On pose $u(x) = x$ (qui se simplifie en dérivant) et $v'(x) = e^x$:

— $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

— **Vérification** : $(x - 1)e^x$ a pour dérivée $e^x + (x - 1)e^x = x e^x$; et $[(x - 1)e^x]_0^1 = 0 - (-1) = 1$ ✓

— **Mauvais choix** : avec $u = e^x$ et $v' = x$, on obtiendrait $\int \frac{x^2}{2} e^x$, plus compliquée.

Réponse. $\int_0^1 x e^x dx = 1$.

Correction de l'exercice 2 - Polynôme fois sinus

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin x$:

— $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos x$.

$$\int_0^\pi x \sin x dx = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx$$

— $[-x \cos x]_0^\pi = -\pi \cos \pi - 0 = \pi$;

— $\int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = 0$.

Résultat : π .

- **Signe** : $x \sin x \geq 0$ sur $[0; \pi]$, l'intégrale est bien positive ✓
- **Piège** : le « moins » de la formule et celui de $v = -\cos x$ se combinent en un « plus » devant $\int \cos x$.

Réponse. π .

Correction de l'exercice 3 - Polynôme fois cosinus

On pose $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sin x$:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$$

- $[x \sin x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \times 1 - 0 = \frac{\pi}{2}$;
- $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 0 + 1 = 1$.

Résultat : $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,571$.

- **Vérification** : la fonction $x \sin x + \cos x$ a pour dérivée $x \cos x$; entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, elle passe de 1 à $\frac{\pi}{2}$ ✓

Réponse. $\frac{\pi}{2} - 1$.

Correction de l'exercice 4 - Polynôme fois logarithme

Ici on **dérive le logarithme** (qui devient une fraction simple) et on primitive le

polynôme : $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$, d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx$$

- $\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e = \frac{e^2}{2}$;
- $\int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Résultat : $\frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2,10$.

- **Règle** : avec un logarithme, c'est **lui** qu'on dérive — on ne connaît pas de primitive simple de $\ln x$ multiplié par autre chose.

Réponse. $\frac{e^2 + 1}{4} \approx 2,10$.

Correction de l'exercice 5 - Logarithme sur x carré

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$, d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} \, dx$$

- $\left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e = -\frac{1}{e} - 0$;
- $\int_1^e \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$.

Résultat : $1 - \frac{2}{e} \approx 0,264$.

— **Piège** : le produit $u'v = \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$; avec le « moins » de la formule, on obtient $+\int \frac{1}{x^2}$.

Réponse. $1 - \frac{2}{e} \approx 0,264$.

Correction de l'exercice 6 - Fonction affine fois exponentielle décroissante

On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = e^{-x}$, d'où $u'(x) = 2$ et $v(x) = -e^{-x}$:

$$\int_0^1 (2x + 1)e^{-x} dx = [-(2x + 1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx$$

— $[-(2x + 1)e^{-x}]_0^1 = -3e^{-1} + 1$;

— $\int_0^1 2e^{-x} dx = [-2e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1} + 2$.

Résultat : $3 - \frac{5}{e} \approx 1,161$.

— **Vérification** : $F(x) = -(2x + 3)e^{-x}$ vérifie $F'(x) = -2e^{-x} + (2x + 3)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x}$ ✓, et $F(1) - F(0) = -\frac{5}{e} + 3$ ✓

Réponse. $3 - \frac{5}{e} \approx 1,16$.

Correction de l'exercice 7 - Une primitive du logarithme

a) On pose $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$, d'où $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$:

$$L(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln x - 0 - (x - 1) = x \ln x - x + 1$$

b) L est la primitive de $\ln$ qui s'annule en 1. En retirant la constante, $x \mapsto x \ln x - x$ est aussi une primitive de $\ln$.

— **Vérification** : $(x \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$ ✓

— **Astuce** : faire apparaître un facteur 1 invisible permet d'intégrer par parties une fonction qui n'est pas un produit.

Réponse. $L(x) = x \ln x - x + 1$; primitive de $\ln$: $x \ln x - x$.

Correction de l'exercice 8 - Le carré du logarithme

On écrit $(\ln x)^2 = 1 \times (\ln x)^2$ et on pose $u(x) = (\ln x)^2$, $v'(x) = 1$:

— $u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x}$ et $v(x) = x$.

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{2 \ln x}{x} dx = e - 2 \int_1^e \ln x dx$$

— Avec la donnée : $e - 2 \times 1 = e - 2 \approx 0,718$.

— **Observation** : l'intégration par parties a fait baisser la puissance du logarithme de 2 à 1 ; c'est le principe des relations de récurrence.

Réponse. $e - 2$.

Correction de l'exercice 9 - Une intégrale qui revient

a) Dans I , on pose $u = \sin x$, $v' = e^x$ ($u' = \cos x$, $v = e^x$) :

$$I = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = 0 - J$$

(car $\sin \pi = \sin 0 = 0$).

b) Dans J , on pose $u = \cos x$, $v' = e^x$ ($u' = -\sin x$) :

$$- J = [e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x \, dx = (-e^\pi - 1) + I.$$

c) En remplaçant : $I = -J = e^\pi + 1 - I$, donc $2I = e^\pi + 1$ et

$$- I = \frac{e^\pi + 1}{2} \approx 12,07.$$

— **Méthode** : l'intégrale « revient » après deux intégrations par parties ; on la traite comme l'**inconnue d'une équation**.

Réponse. $I = \frac{e^\pi + 1}{2} \approx 12,07$.

Correction de l'exercice 10 - Une aire par parties

$f(x) \geq 0$ sur $[0; 2]$: l'aire est l'intégrale. On pose $u = x$ et $v' = e^{-x/2}$, d'où $u' = 1$ et $v = -2e^{-x/2}$:

$$\int_0^2 x e^{-x/2} \, dx = \left[-2x e^{-x/2} \right]_0^2 + 2 \int_0^2 e^{-x/2} \, dx$$

$$- \left[-2x e^{-x/2} \right]_0^2 = -4e^{-1} ;$$

$$- 2 \int_0^2 e^{-x/2} \, dx = 2 \left[-2e^{-x/2} \right]_0^2 = 2(-2e^{-1} + 2) = 4 - 4e^{-1}.$$

$$A = 4 - \frac{8}{e} \approx 1,06 \text{ u.a.}$$

— **Contrôle** : la fonction atteint son maximum $2e^{-1} \approx 0,74$ en $x = 2$; l'aire est inférieure à $2 \times 0,74 = 1,47$ ✓

Réponse. $A = 4 - \frac{8}{e} \approx 1,06 \text{ u.a.}$

Correction de l'exercice 11 - Une relation de récurrence

$$a) I_0 = \int_1^e 1 \, dx = e - 1.$$

b) On pose $u = (\ln x)^{n+1}$, $v' = 1$; alors $u' = (n+1) \frac{(\ln x)^n}{x}$ et $v = x$:

$$I_{n+1} = \left[x(\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e x \times (n+1) \frac{(\ln x)^n}{x} \, dx = e - (n+1)I_n$$

(car $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$).

c) On applique la relation de proche en proche :

$$- I_1 = e - I_0 = 1 ;$$

$$- I_2 = e - 2I_1 = e - 2 \approx 0,718 ;$$

$$- I_3 = e - 3I_2 = 6 - 2e \approx 0,563.$$

— **Cohérence** : sur $[1; e]$, $0 \leq \ln x \leq 1$, donc $(\ln x)^n$ décroît avec n : la suite doit décroître ✓

Réponse. $I_0 = e - 1$, $I_1 = 1$, $I_2 = e - 2$, $I_3 = 6 - 2e$.

Correction de l'exercice 12 - Valeur moyenne du logarithme

Par définition :

$$\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e \ln x \, dx = \frac{1}{e-1} [x \ln x - x]_1^e$$

- $[x \ln x - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$.
- $\mu = \frac{1}{e-1} \approx 0,582$.
- **Cohérence** : $\ln$ varie de 0 à 1 sur cet intervalle ; sa moyenne est entre les deux, un peu au-dessus de $\frac{1}{2}$ car la courbe est concave (elle « bombe » vers le haut) ✓
- **Interprétation** : le rectangle de base $[1 ; e]$ et de hauteur 0,582 a la même aire (1 u.a.) que le domaine sous la courbe.

Réponse. $\mu = \frac{1}{e-1} \approx 0,582$.

Correction de l'exercice 13 - Distance parcourue

La distance est $\int_0^3 t e^{-t} \, dt$ (vitesse positive). Intégration par parties avec $u = t$ et $v' = e^{-t}$ ($u' = 1$, $v = -e^{-t}$) :

$$\int_0^3 t e^{-t} \, dt = [-t e^{-t}]_0^3 + \int_0^3 e^{-t} \, dt = -3e^{-3} + (1 - e^{-3}) = 1 - 4e^{-3}$$

- $d = 1 - 4e^{-3} \approx 0,80$ m.
- **Limite** : sur $[0 ; T]$, la distance vaut $1 - (T + 1)e^{-T}$, qui tend vers 1 m quand $T \rightarrow +\infty$ (croissances comparées).
- **Remarque** : la vitesse est maximale en $t = 1$ ($e^{-1} \approx 0,37$ m/s) puis décroît vers 0.

Réponse. $d = 1 - 4e^{-3} \approx 0,80$ m.

Correction de l'exercice 14 - Bien choisir u et v'

a) Avec $v' = \ln x$, il faudrait connaître $v = x \ln x - x$; l'intégrale restante serait $\int 2x(x \ln x - x) \, dx$, **plus compliquée** que celle de départ.

b) On pose $u = \ln x$ et $v' = x^2$, d'où $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^3}{3}$:

$$K = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e$$

- $K = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} = \frac{3e^3 - e^3 + 1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9} \approx 4,57$.
- **Règle** : on dérive ce qui se simplifie ($\ln x$ devient $\frac{1}{x}$) et on intègre ce qui reste simple (x^2).

Réponse. $K = \frac{2e^3 + 1}{9} \approx 4,57$.

Correction de l'exercice 15 - Quand l'intégration par parties est inutile

a) On reconnaît des formes $u'e^u$ et $u' \cos u$ avec $u = x^2$, $u' = 2x$:

$$x e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} e^{x^2} \quad 2x \cos(x^2) \rightarrow \sin(x^2)$$

- $\int_0^1 x e^{x^2} \, dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2} \approx 0,859$.
- $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) \, dx = \left[\sin(x^2) \right]_0^{\sqrt{\pi}} = \sin \pi - \sin 0 = 0$.

b) Avec $u = x$, il faudrait $v' = e^{x^2}$, c'est-à-dire une primitive de e^{x^2} — qui ne s'exprime avec

aucune fonction usuelle.

— **Réflexe** : avant d'intégrer par parties, chercher une **forme composée** ; c'est beaucoup plus rapide quand elle existe.

Réponse. $\frac{e-1}{2}$ et 0, par formes composées.