

Plaquette 2 - Propriétés : linéarité, Chasles, moyenne

Calcul intégral — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Soit f et g continues sur un intervalle I , a, b, c dans I et λ, μ réels.

Linéarité :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \quad \int_b^a f = -\int_a^b f \quad \int_a^a f = 0$$

Positivité et croissance (pour $a \leq b$) : si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, $\int_a^b f \geq 0$; si $f \leq g$, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Inégalité de la moyenne : si $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Valeur moyenne de f sur $[a; b]$ ($a < b$) :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

C'est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ qui a la même aire que le domaine sous la courbe.

Symétries : si f est **paire**, $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$; si f est **impaire**, $\int_{-a}^a f = 0$.

Correction de l'exercice 1 - Utiliser la linéarité

On applique la **linéarité** de l'intégrale :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

a) $2 \times 3 - 3 \times (-1) = 6 + 3 = 9$.

b) $\int_0^2 f + \int_0^2 4 dx = 3 + 4 \times 2 = 11$ (l'intégrale d'une constante k sur $[a; b]$ vaut $k(b-a)$).

c) $3 + \int_0^2 x dx = 3 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 3 + 2 = 5$.

— **Piège en b)** : écrire $3 + 4 = 7$ en oubliant que la constante 4 s'intègre sur un intervalle de longueur 2.

Réponse. a) 9 · b) 11 · c) 5.

Correction de l'exercice 2 - Utiliser la relation de Chasles

Relation de Chasles :

$$\int_0^5 f = \int_0^2 f + \int_2^5 f$$

a) $7 = \int_0^2 f + 4$, donc $\int_0^2 f = 3$.

b) Échanger les bornes change le signe : $\int_5^0 f = -\int_0^5 f = -7$.

c) Bornes égales : l'intégrale est nulle.

- **Image** : l'intégrale « compte » l'aire dans le sens de parcours ; aller de 5 à 0, c'est parcourir à l'envers, d'où le signe moins.
- **Contrôle** : $3 + 4 = 7$ ✓

Réponse. a) $3 \cdot$ b) $-7 \cdot$ c) 0 .

Correction de l'exercice 3 - Une fonction définie par morceaux

a) À gauche, $1^2 = 1$; à droite, $2 - 1 = 1$: les deux morceaux se raccordent, f est continue en 1.

b) On découpe avec la **relation de Chasles** au point de raccord :

$$\int_0^2 f = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx$$

$$- \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} ;$$

$$- \int_1^2 (2 - x) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = (4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{ (c'est un triangle de base 1 et de hauteur 1).}$$

$$\int_0^2 f = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Réponse. $\int_0^2 f = \frac{5}{6}$.

Correction de l'exercice 4 - Valeur absolue et Chasles

On supprime la valeur absolue en séparant les cas :

- sur $[0 ; 1]$, $x - 1 \leq 0$, donc $|x - 1| = 1 - x$;
- sur $[1 ; 3]$, $|x - 1| = x - 1$.

Relation de Chasles :

$$\int_0^3 |x - 1| dx = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^3 (x - 1) dx$$

$$- \int_0^1 (1 - x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} ;$$

$$- \int_1^3 (x - 1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 2.$$

$$\text{Total : } \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

- **Contrôle géométrique** : deux triangles d'aires $\frac{1 \times 1}{2}$ et $\frac{2 \times 2}{2}$ ✓

Réponse. $\frac{5}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Une intégrale nulle

a) Avec la primitive $\frac{x^3}{3} - x$:

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

b) **Non** : la fonction est négative sur $[-1 ; 1]$ et positive sur $[1 ; 2]$.

- L'intégrale compte **positivement** l'aire au-dessus de l'axe ($[1; 2]$) et **négativement** l'aire en dessous ($[-1; 1]$).
- Ici les deux aires valent $\frac{4}{3}$ chacune : $\int_{-1}^1 (x^2 - 1) = -\frac{4}{3}$ et $\int_1^2 (x^2 - 1) = \frac{4}{3}$. Elles se compensent.
- **À retenir** : une intégrale nulle ne signifie pas une fonction nulle, ni une aire nulle.

Réponse. a) 0 · b) non : les aires au-dessus et en dessous de l'axe se compensent ($\frac{4}{3}$ chacune).

Correction de l'exercice 6 - Comparer sans calculer

a) Pour $x \in [0; 1]$: $x^2 = x \times x \leq x$. L'exponentielle étant croissante, $e^{x^2} \leq e^x$. Par ailleurs $x^2 \geq 0$, donc $e^{x^2} \geq 1$.

b) On intègre l'encadrement $1 \leq e^{x^2} \leq e^x$ sur $[0; 1]$ (croissance de l'intégrale) :

$$\int_0^1 1 \, dx \leq I \leq \int_0^1 e^x \, dx$$

- $1 \leq I \leq [e^x]_0^1 = e - 1 \approx 1,718$.
- **Valeur réelle** : $I \approx 1,463$ ✓
- **Méthode** : comparer la fonction à des fonctions dont on connaît une primitive, puis intégrer l'inégalité.

Réponse. $1 \leq I \leq e - 1$.

Correction de l'exercice 7 - Valeur moyenne du sinus

a) Par définition de la valeur moyenne :

$$\mu = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{1}{\pi} (1 + 1) = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$$

b) Le rectangle de base $[0; \pi]$ et de hauteur $\frac{2}{\pi}$ a la **même aire** (2 u.a.) que le domaine sous l'arche de sinus.

- La droite pointillée $y = \frac{2}{\pi}$ coupe l'arche : les parties de l'arche au-dessus de la droite compensent exactement les « creux » sous la droite.
- **Physique** : c'est pour cela qu'un courant sinusoïdal redressé a une intensité moyenne égale à $\frac{2}{\pi} \approx 64$ % de son intensité maximale.

Réponse. $\mu = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$.

Correction de l'exercice 8 - Température moyenne

On applique la définition, avec $b - a = 12$:

$$\mu = \frac{1}{12} \int_6^{18} T(t) \, dt = \frac{1}{12} \left(\int_6^{18} 15 \, dt + 5 \int_6^{18} \sin\left(\frac{\pi(t-6)}{12}\right) \, dt \right)$$

- $\int_6^{18} 15 \, dt = 15 \times 12 = 180$.
- Une primitive de $\sin\left(\frac{\pi(t-6)}{12}\right)$ est $-\frac{12}{\pi} \cos\left(\frac{\pi(t-6)}{12}\right)$; entre 6 et 18, l'angle va de 0 à π :
- $\int_6^{18} \sin(\dots) \, dt = -\frac{12}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{24}{\pi}$.

Donc $\mu = \frac{1}{12} \left(180 + \frac{120}{\pi} \right) = 15 + \frac{10}{\pi} \approx 18,2 \text{ } ^\circ\text{C}$.

— **Cohérence** : entre le minimum ($15 \text{ } ^\circ\text{C}$) et le maximum ($20 \text{ } ^\circ\text{C}$ à midi) ✓

Réponse. $\mu = 15 + \frac{10}{\pi} \approx 18,2 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Correction de l'exercice 9 - L'inégalité de la moyenne

a) Pour $x \in [0; 1]$: $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$ et, par passage à l'inverse (qui renverse l'ordre des nombres positifs),

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

b) **Inégalité de la moyenne** sur un intervalle de longueur 1 :

— $\frac{1}{2} \times 1 \leq I \leq 1 \times 1$, soit $\frac{1}{2} \leq I \leq 1$.

— **Valeur réelle** : $I = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$ (la primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ n'est pas au programme).

— **Interprétation** : la valeur moyenne de la fonction sur $[0; 1]$ est comprise entre son minimum $\frac{1}{2}$ et son maximum 1.

Réponse. $\frac{1}{2} \leq I \leq 1$.

Correction de l'exercice 10 - Parité et intégrale

Symétries : pour f impaire, $\int_{-a}^a f = 0$; pour f paire,

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$$

a) $f(x) = x \cos x$ vérifie $f(-x) = (-x) \cos(-x) = -x \cos x = -f(x)$: f est **impaire**, donc l'intégrale est nulle.

b) Par linéarité : $\int_{-1}^1 x^3 dx + \int_{-1}^1 x^2 dx$.

— x^3 est impaire : sa contribution est nulle.

— x^2 est paire : $2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$.

Total : $\frac{2}{3}$.

— **Graphiquement** : pour une fonction impaire, les aires de part et d'autre de l'origine sont égales et de signes opposés.

Réponse. a) 0 · b) $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 11 - Une valeur absolue trigonométrique

a) Calcul :

$$\int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = 0 - 0 = 0$$

b) Le cosinus est positif sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Par Chasles :

— $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$;

— $\int_{\pi/2}^\pi (-\cos x) dx = -[\sin x]_{\pi/2}^\pi = -(0 - 1) = 1$.

Total : $\int_0^\pi |\cos x| dx = 2$.

- **Interprétation** : a) donne l'aire **algébrique** (les deux arches se compensent) ; b) donne l'aire **géométrique** totale, 2 u.a.

Réponse. a) 0 · b) 2.

Correction de l'exercice 12 - Une suite d'intégrales

a) Par linéarité :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx$$

Sur $[0; 1]$: $x^n \geq 0$, $x - 1 \leq 0$ et $1 + x > 0$; la fonction intégrée est négative, donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$: la suite est **décroissante**.

b) Sur $[0; 1]$, $1 + x \geq 1$, donc $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$. En intégrant :

$$- 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

$$- \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 ; \text{ par le théorème des } \mathbf{gendarmes}, I_n \rightarrow 0.$$

— **Méthode** : on ne calcule jamais I_n ; on l'étudie par **comparaison** avec une intégrale connue.

Réponse. (I_n) décroissante, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, donc $I_n \rightarrow 0$.

Correction de l'exercice 13 - Vitesse moyenne

a) **Distance** : intégrale de la vitesse (positive) :

$$d = \int_0^4 (2t + 1) dt = \left[t^2 + t \right]_0^4 = 16 + 4 = 20 \text{ m}$$

b) **Vitesse moyenne** :

$$- \mu = \frac{1}{4-0} \int_0^4 v(t) dt = \frac{20}{4} = 5 \text{ m/s} - \text{c'est bien « distance divisée par durée »}.$$

— $v(t) = 5 \Leftrightarrow 2t + 1 = 5 \Leftrightarrow t = 2$: la vitesse moyenne est atteinte **à mi-parcours** (en temps), ce qui est propre aux vitesses affines.

— **Théorème** : une fonction continue atteint toujours sa valeur moyenne sur un segment (conséquence du TVI).

Réponse. a) 20 m · b) 5 m/s, atteinte en $t = 2$ s.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver une intégrale inconnue

On pose $A = \int_0^1 f$ et $B = \int_0^1 g$, et on utilise la linéarité :

$$\int_0^1 (f + 2x) = A + \int_0^1 2x dx = A + \left[x^2 \right]_0^1 = A + 1$$

$$- A + 1 = 5, \text{ donc } A = 4.$$

$$- \text{Deuxième égalité : } 3A - B = 10, \text{ soit } 12 - B = 10 \text{ et } B = 2.$$

— **Idée** : la linéarité transforme les égalités entre intégrales en un **système d'équations** dont les inconnues sont les intégrales elles-mêmes.

— **Contrôle** : avec $f = 4$ et $g = 2$ (constantes), on a bien $\int_0^1 (4 + 2x) = 5$ et $\int_0^1 (12 - 2) = 10$
✓

Réponse. $\int_0^1 f = 4$ et $\int_0^1 g = 2$.

Correction de l'exercice 15 - Remplissage à débit variable

a) Le volume est l'intégrale du débit ; on découpe avec la **relation de Chasles** :

$$V = \int_0^5 2t \, dt + \int_5^{20} 10 \, dt = \left[t^2 \right]_0^5 + 10 \times 15 = 25 + 150 = 175 \text{ L}$$

— Géométriquement : un triangle ($\frac{5 \times 10}{2} = 25$) et un rectangle ($15 \times 10 = 150$).

b) **Débit moyen** :

— $\frac{1}{20} \int_0^{20} d(t) \, dt = \frac{175}{20} = 8,75 \text{ L/min.}$

— **Remarque** : ce n'est pas la moyenne des débits 0 et 10 ; la valeur moyenne tient compte du **temps passé** à chaque débit.

Réponse. a) 175 L · b) 8,75 L/min.