

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : aires, valeur moyenne et intégration par parties

Calcul intégral — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition et interprétation. Pour f **continue et positive** sur $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est l'**aire** sous la courbe, en unités d'aire.

Théorème fondamental. Si F est **une** primitive de f sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

Et réciproquement, $x \mapsto \int_a^x f$ est **dérivable** de dérivée f .

Propriétés.

- **Linéarité** : $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.
- **Chasles** : $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$.
- **Positivité** : $f \geq 0$ sur $[a; b]$ (avec $a \leq b$) $\Rightarrow \int_a^b f \geq 0$.
- **Croissance** : $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- **Encadrement** : $m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.
- **Orientation** : $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Valeur moyenne de f sur $[a; b]$:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Elle est **atteinte** si f est continue (théorème de la moyenne).

Intégration par parties.

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

- **Choix** : on **dérive** le facteur qui se simplifie (ln, polynôme) et on **primitive** l'autre (e^x , cos, sin).

Aire entre deux courbes : si $f \geq g$ sur $[a; b]$,

$$A = \int_a^b (f - g)$$

Parité : $\int_{-a}^a f = 0$ si f est **impaire**, $= 2 \int_0^a f$ si f est **paire**.

Correction de l'exercice 1 - Intégrales de polynômes

a) Une primitive est $x^3 - 2x^2 + x$:

$$[x^3 - 2x^2 + x]_0^2 = (8 - 8 + 2) - 0 = 2$$

b) On écrit $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, de primitive $-\frac{1}{x}$:

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

- **Contrôle de a)** : l'intégrande vaut 1 en 0, -1 en 1, 5 en 2 — il change de signe, donc le résultat **n'est pas** une aire simple. La valeur 2 est un **bilan algébrique** ✓
- **Contrôle de b)** : l'intégrande décroît de 1 à $\frac{1}{9} \approx 0,111$ sur un intervalle de largeur 2 ; l'aire est donc entre 0,22 et 2 — 0,667 est plausible ✓
- **Point de vigilance** : l'interprétation « aire » n'est valable que si $f \geq 0$ sur tout l'intervalle.

Réponse. a) 2 · b) $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 2 - Intégrale avec exponentielle

- **Primitive** : celle de e^x est e^x ; celle de $-e^{-x}$ est $+e^{-x}$ (attention au signe, $u' = -1$).

$$F(x) = 2e^x + e^{-x}$$
- **Évaluation** :

$$[2e^x + e^{-x}]_0^1 = (2e + e^{-1}) - (2 + 1) = 2e + \frac{1}{e} - 3$$
- **Valeur numérique** : $5,4366 + 0,3679 - 3 \approx 2,8045$.
- **Contrôle par dérivation** : $F'(x) = 2e^x - e^{-x}$ ✓
- **Contrôle d'encadrement** : l'intégrande vaut $2 - 1 = 1$ en 0 et $2e - e^{-1} \approx 5,069$ en 1 ; croissante, elle donne une aire entre 1 et 5,07 — 2,80 est plausible ✓
- **Erreur classique** : écrire $-e^{-x}$ comme primitive de $-e^{-x}$ — la dérivée de e^{-x} est $-e^{-x}$, il faut donc changer le signe.

Réponse. $2e + \frac{1}{e} - 3 \approx 2,805$.

Correction de l'exercice 3 - Forme composée

Première intégrale. Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$:

$$[\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0,693$$

Seconde intégrale. Forme $u'e^u$ à un facteur $\frac{1}{2}$ près ($u = x^2$, $u' = 2x$) :

$$\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2} \approx 0,859$$

- **Contrôles** : la première intégrande varie de 0 à 1, l'aire 0,693 est cohérente ✓ ; la seconde varie de 0 à $e \approx 2,718$, l'aire 0,859 est plausible ✓
- **Méthode** : avant de chercher une IPP ou un changement de variable, **toujours** vérifier si l'intégrande est de la forme $u' \times g(u)$ — c'est le cas le plus fréquent au programme.

Réponse. $\ln 2 \approx 0,693$ et $\frac{e-1}{2} \approx 0,859$.

Correction de l'exercice 4 - Intégration par parties

- **Choix** : on **dérive** le polynôme x et on **primitive** e^{2x} .
- Posons $u'(x) = e^{2x}$ (donc $u = \frac{e^{2x}}{2}$) et $v(x) = x$ (donc $v' = 1$).

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[\frac{x e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx$$

— **Premier terme** : $\frac{e^2}{2} - 0 = \frac{e^2}{2}$.

— **Second** : $\left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4}$.

— **Résultat** :

$$\frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2,097$$

— **Contrôle d'encadrement** : l'intégrande croît de 0 à $e^2 \approx 7,389$; l'aire est donc inférieure à 7,39 ✓

— **Choix inverse à éviter** : primitiver x donnerait $\int \frac{x^2}{2} e^{2x}$ — **plus compliqué** que l'intégrale de départ.

Réponse. $\frac{e^2 + 1}{4} \approx 2,097$.

Correction de l'exercice 5 - IPP avec logarithme

— **Choix** : le $\ln$ n'a pas de primitive simple, mais sa **dérivée** l'est ($\frac{1}{x}$). On dérive donc $\ln$.

— Posons $u'(x) = 1$ (donc $u = x$) et $v(x) = \ln x$ (donc $v' = \frac{1}{x}$).

$$\int_1^2 \ln x dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \times \frac{1}{x} dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 1 dx$$

— **Premier terme** : $2 \ln 2 - 1 \ln 1 = 2 \ln 2$.

— **Second** : $[x]_1^2 = 1$.

— **Résultat** :

$$2 \ln 2 - 1 \approx 1,3863 - 1 = 0,3863$$

— **Contrôle** : sur $[1; 2]$, $\ln x$ varie de 0 à 0,693 ; l'aire est donc inférieure à 0,693 ✓

— **Primitive de $\ln$ à retenir** : $x \ln x - x$ — on la vérifie par dérivation, $\ln x + 1 - 1 = \ln x$ ✓

— **Règle** : avec un $\ln$, **toujours** le prendre comme le facteur à dériver.

Réponse. $2 \ln 2 - 1 \approx 0,386$.

Correction de l'exercice 6 - Double IPP

Première IPP : $u' = e^x$, $v = x^2$ (on dérive le polynôme).

$$I = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2J$$

Seconde IPP pour $J = \int_0^1 x e^x dx$: $u' = e^x$, $v = x$.

— $J = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$.

— **Résultat** :

$$I = e - 2 \approx 0,718$$

— **Contrôle d'encadrement** : sur $[0; 1]$, $x^2 e^x$ varie de 0 à $e \approx 2,718$, et reste petit près de 0 — une aire de 0,72 est plausible ✓

— **Règle de comptage** : chaque IPP **abaisse de 1** le degré du polynôme. Pour $x^n e^x$, il faut donc n intégrations par parties.

- **Vérification par primitive explicite** : $(x^2 - 2x + 2)e^x$ est une primitive ; en 1 elle vaut e , en 0 elle vaut 2, différence $e - 2$ ✓

Réponse. $e - 2 \approx 0,718$.

Correction de l'exercice 7 - Valeur moyenne

- **Définition** : $\mu = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx$.
- **Intégrale** : $\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9$.
- **Valeur moyenne** : $\mu = \frac{9}{3} = 3$.
- **Point où elle est atteinte** : on résout $x^2 = 3$, soit $x = \sqrt{3} \approx 1,732$ (dans $[0; 3]$ ✓).
- **Théorème de la moyenne** : f étant **continue**, la valeur moyenne est toujours atteinte — c'est le TVI appliqué entre le minimum et le maximum.
- **Contrôle** : $\mu = 3$ est bien entre $f(0) = 0$ et $f(3) = 9$ ✓
- **Interprétation géométrique** : le rectangle de base $[0; 3]$ et de hauteur 3 a la **même aire** (9) que la région sous la parabole ✓
- **Remarque** : $\sqrt{3} \approx 1,73$ est plus proche de 3 que de 0 — la fonction croissant vite, la moyenne se situe dans la **seconde moitié** de l'intervalle.

Réponse. $\mu = 3$, atteinte en $x = \sqrt{3} \approx 1,73$.

Correction de l'exercice 8 - Aire entre deux courbes

- **Intersections** : $x = x^2$ donne $x(x - 1) = 0$, soit $x = 0$ et $x = 1$.
- **Position relative** : sur $]0; 1[$, on a $x > x^2$ (par exemple en 0,5 : $0,5 > 0,25$) — la **droite est au-dessus**.
- **Aire** :

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

- **Contrôle d'ordre de grandeur** : le domaine est inscrit dans le carré unité, d'aire 1 ; il en occupe $\frac{1}{6} \approx 17\%$ — plausible pour cette « lentille » fine ✓
- **Contrôle par différence d'aires** : l'aire sous la droite est $\frac{1}{2}$, celle sous la parabole $\frac{1}{3}$; la différence vaut bien $\frac{1}{6}$ ✓
- **Méthode** : toujours déterminer **qui est au-dessus** avant d'intégrer — inverser l'ordre donnerait une aire **négative**.

Réponse. $A = \frac{1}{6} \approx 0,167$.

Correction de l'exercice 9 - Intégrale et parité

- **Première intégrale** : $x^3 - 5x$ est **impaire** ($f(-x) = -f(x)$) et l'intervalle est **symétrique** — l'intégrale est donc **nulle**.
- **Vérification** : une primitive est $\frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2}$, fonction **paire** : elle prend la même valeur en -2 et 2 , la différence est nulle ✓
- **Seconde intégrale** : $x^2 + 1$ est **paire**, donc

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = 2 \int_0^1 (x^2 + 1) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,667$$

- **Contrôle** : l'intégrande varie de 1 (en 0) à 2 (en ± 1) sur un intervalle de largeur 2 ; l'aire est donc entre 2 et 4 — 2,67 est cohérent ✓
- **Réflexe** : sur un intervalle **symétrique**, vérifier la **parité avant tout calcul** fait gagner un temps considérable.

Réponse. 0 (impaire) et $\frac{8}{3}$ (paire).

Correction de l'exercice 10 - Encadrement d'une intégrale

- **Encadrement de l'intégrande** : pour $x \in [0; 1]$, on a $1 \leq 1 + x^3 \leq 2$, donc

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + x^3} \leq 1$$

- Par **croissance** de l'intégrale sur un intervalle de largeur 1 :

$$0,5 \leq I \leq 1$$

- **Affinage** : comme $x^3 \leq x^2$ sur $[0; 1]$, on a $\frac{1}{1 + x^3} \geq \frac{1}{1 + x^2}$, donc $I \geq \frac{\pi}{4} \approx 0,785$.
- **Valeur numérique** : $I \approx 0,8356$ — bien dans $[0,785; 1]$ ✓
- **Intérêt de la méthode** : la primitive exacte existe (décomposition en éléments simples avec $x^2 - x + 1$) mais elle est **hors programme** ; l'encadrement donne l'essentiel.
- **Méthode générale** : encadrer l'intégrande puis intégrer est la seule voie quand la primitive n'est pas accessible.

Réponse. $\frac{\pi}{4} \approx 0,785 \leq I \leq 1$, avec $I \approx 0,836$.

Correction de l'exercice 11 - Fonction définie par une intégrale

a) - L'intégrande $t \mapsto \frac{1}{1 + t^2}$ est **continue** sur $\mathbb{R}$ (dénominateur jamais nul).

- Le **théorème fondamental** donne : F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

b) - **Monotonie** : $F'(x) > 0$ pour tout x , donc F est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

- **Parité** : l'intégrande est **paire**. Le changement $t \mapsto -u$ donne

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1 + t^2} = - \int_0^x \frac{du}{1 + u^2} = -F(x)$$

- F est donc **impair**, avec $F(0) = 0$.
- **Contrôles** : $F(1) = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$ (c'est arctan, hors programme mais calculable numériquement) ✓ ; $F(-1) = -0,785$ ✓
- **Règle à retenir** : la primitive **nulle en 0** d'une fonction **paire** est **impair** — et réciproquement.

Réponse. a) $F'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ · b) F impair et strictement croissante.

Correction de l'exercice 12 - Aire et modèle concret

- **Volume** = intégrale du débit :

$$V = \int_0^{12} \left(20 + 10 \sin \frac{\pi t}{12} \right) dt$$

— **Primitive** : celle de $\sin \frac{\pi t}{12}$ est $-\frac{12}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12}$ (le facteur $\frac{12}{\pi}$ compense $u' = \frac{\pi}{12}$).

$$V = [20t - \frac{120}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12}]_0^{12}$$

— **Évaluation** : en $t = 12$, $\cos \pi = -1$ donne $240 + \frac{120}{\pi}$; en $t = 0$, $\cos 0 = 1$ donne $-\frac{120}{\pi}$.

$$V = 240 + \frac{240}{\pi} \approx 240 + 76,39 = 316,39$$

— **Unité** : t étant en **heures** et d en m^3/s , il faut convertir :

$$V = 316,39 \times 3600 \approx 1,139 \times 10^6 \text{ m}^3.$$

— **Contrôle** : le débit moyen est $\frac{316,39}{12} \approx 26,37 \text{ m}^3/\text{s}$, valeur bien comprise entre 20 et 30 — cohérent, la demi-période de sinus étant **positive** sur $[0; 12]$ ✓

— **Lecture** : sur $[0; 12]$ le sinus reste positif, d'où un débit moyen **supérieur** à la valeur de base 20.

Réponse. $V = 240 + \frac{240}{\pi} \approx 316,4 \text{ (m}^3/\text{s)} \cdot \text{h}$, soit $\approx 1,14$ million de m^3 .

Correction de l'exercice 13 - Suite d'intégrales

a) $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1} \approx 0,632$.

b) - **Positivité** : sur $[0; 1]$, $x^n e^{-x} \geq 0$, donc $I_n \geq 0$ (positivité de l'intégrale).

— **Décroissance** : pour $x \in [0; 1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$, donc $x^{n+1} e^{-x} \leq x^n e^{-x}$.

— Par **croissance** de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$ ✓

— **Convergence** : (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle **converge**.

— **Limite** : on encadre. Sur $[0; 1]$, $e^{-x} \leq 1$, donc

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

— Comme $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, les **gendarmes** donnent $I_n \rightarrow 0$.

— **Contrôles** : $I_1 = 1 - 2e^{-1} \approx 0,264$ ✓ ; $I_2 = 2 - 5e^{-1} \approx 0,161$ ✓ — décroissance confirmée.

Réponse. a) $1 - e^{-1} \approx 0,632$ · b) décroissante positive, $I_n \rightarrow 0$.

Correction de l'exercice 14 - Intégrale et signe

Intégrale (bilan algébrique).

$$\int_0^3 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^3 = 9 - 9 = 0$$

Aire géométrique. Le résultat nul signale un **changement de signe** : $x^2 - 2x = x(x - 2)$ est **négatif** sur $]0; 2[$ et **positif** sur $]2; 3[$.

— **Sur $[0; 2]$** : $\int_0^2 (x^2 - 2x) = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$, donc l'aire vaut $\frac{4}{3}$.

— **Sur $[2; 3]$** : $\int_2^3 (x^2 - 2x) = (9 - 9) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{4}{3}$.

— **Aire totale** :

$$A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,667$$

— **Leçon capitale** : une intégrale **nulle** ne signifie **pas** une aire nulle. L'aire s'obtient en découpant selon le **signe** et en prenant les valeurs absolues.

— **Contrôle** : $\frac{4}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) = 0$ ✓ — les deux contributions se compensent exactement.

Réponse. Intégrale 0 ; aire $\frac{8}{3} \approx 2,667$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : aire et valeur moyenne

a) **IPP** : on dérive x et on primitive e^{-x} .

— Posons $u'(x) = e^{-x}$ (donc $u = -e^{-x}$) et $v(x) = x$ (donc $v' = 1$).

$$\int_0^2 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx$$

— **Premier terme** : $-2e^{-2} - 0 = -2e^{-2}$.

— **Second** : $[-e^{-x}]_0^2 = 1 - e^{-2}$.

— **Résultat** :

$$1 - 3e^{-2} \approx 1 - 0,4060 = 0,5940$$

b) - **Aire** : $f \geq 0$ sur $[0; 2]$, donc l'aire vaut $1 - 3e^{-2} \approx 0,594$ unité d'aire.

— **Valeur moyenne** : $\mu = \frac{1}{2} \times 0,594 \approx 0,297$.

— **Contrôles** : le maximum de f est atteint en $x = 1$ (car $f' = (1 - x)e^{-x}$), où $f(1) = e^{-1} \approx 0,368$.

— L'aire est donc majorée par $2 \times 0,368 = 0,736$ ✓, et $\mu \leq 0,368$ ✓

— **Atteinte de la moyenne** : $\mu \approx 0,297$ est atteinte deux fois, une fois sur chaque branche de variation — cohérent avec le théorème de la moyenne.

Réponse. a) $1 - 3e^{-2} \approx 0,594$ · b) même aire ; $\mu \approx 0,297$.