

Plaquette 3 - Calcul d'intégrales par primitives

Calcul intégral — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On calcule une intégrale en **trois temps** : trouver une primitive F (tableau usuel ou forme composée), écrire $[F(x)]_a^b$, puis calculer $F(b) - F(a)$ **sans oublier les parenthèses**. Pour une **aire**, on étudie d'abord le **signe** de la fonction (ou de la différence de deux fonctions) et on découpe l'intervalle là où il change.

Exercice 1 - Un polynôme

Calculer $I = \int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$ et $J = \int_{-1}^1 (x^3 - 4x + 2) dx$.

Exercice 2 - Inverses et racines

Calculer :

- a) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
- b) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$
- c) $\int_1^3 \frac{2}{x} dx$

Exercice 3 - Fonctions trigonométriques

Calculer :

- a) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$
- b) $\int_0^{\pi} \sin x dx$
- c) $\int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx$

Exercice 4 - Une exponentielle décroissante

Calculer $I = \int_0^1 e^{-2x} dx$ puis $J = \int_0^a e^{-2x} dx$ pour $a > 0$. Déterminer la limite de J quand $a \rightarrow +\infty$.

Exercice 5 - Une puissance de fonction affine

Calculer $\int_0^1 (2x + 1)^3 dx$ de deux façons : avec une forme composée, puis en développant.

Exercice 6 - Logarithme sur x

Calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ et $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

Exercice 7 - Une racine composée

Calculer $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$.

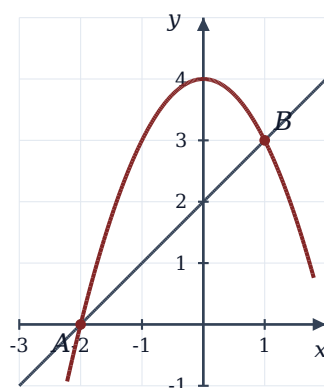
Exercice 8 - Sinus fois cosinus carré

Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

Exercice 9 - Aire entre une parabole et une droite

Soit $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x + 2$.

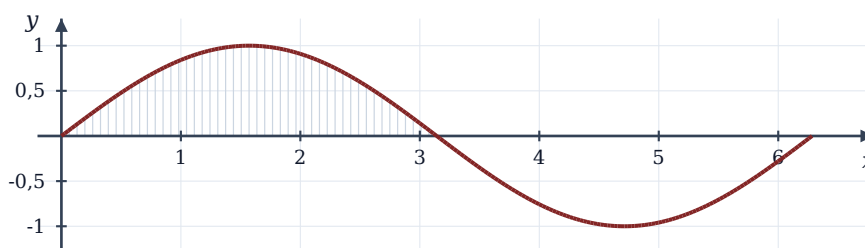
- Déterminer les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
- Calculer l'aire du domaine compris entre les deux courbes.



Parabole (trait coloré) et droite $y = x + 2$

Exercice 10 - Aire algébrique et aire géométrique

- Calculer $\int_0^{2\pi} \sin x dx$.
- Calculer l'aire totale du domaine compris entre la courbe du sinus et l'axe des abscisses sur $[0 ; 2\pi]$.



Deux arches de sinus sur $[0 ; 2\pi]$ ($\pi \approx 3,14$)

Exercice 11 - Trouver une borne

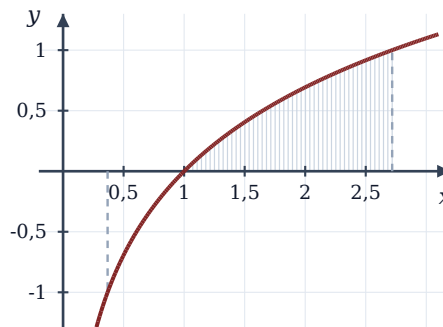
- Pour $x > 1$, exprimer $A(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.
- Déterminer x pour que l'aire sous l'hyperbole entre 1 et x vaille 2.

c) Déterminer $a > 0$ tel que $\int_0^a (2x + 1) dx = 6$.

Exercice 12 - Aire entre le logarithme et l'axe

On admet que $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0 ; +\infty[$.

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $\ln$, l'axe des abscisses et les droites $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.



Courbe de $\ln$ entre $1/e$ et e

Exercice 13 - Une fonction définie par une intégrale

Soit $G(x) = \int_0^x e^{-t} dt$ pour $x \geq 0$.

- Calculer $G(x)$.
- Étudier les variations de G et sa limite en $+\infty$. Interpréter.

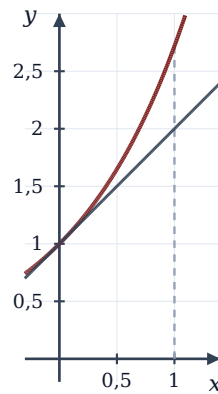
Exercice 14 - Distance d'un freinage

Un véhicule freine ; sa vitesse (en m/s) vaut $v(t) = 10 e^{-0,5t}$, t en secondes.

- Calculer la distance parcourue pendant les 4 premières secondes.
- Quelle distance parcourrait-il au total si le freinage suivait indéfiniment ce modèle ?

Exercice 15 - Aire entre l'exponentielle et une droite

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de l'exponentielle, sa tangente en 0 (d'équation $y = x + 1$) et les droites $x = 0$ et $x = 1$.



Courbe de l'exponentielle et sa tangente en 0