

Plaquette 1 - Intégrale et aire d'une fonction positive

Calcul intégral — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

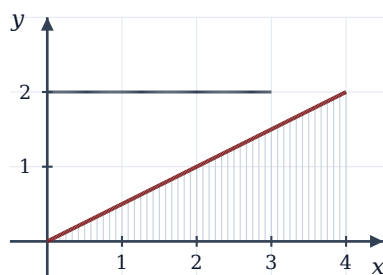
Pour une fonction **continue et positive**, $\int_a^b f(x) dx$ est l'**aire** du domaine situé sous la courbe, entre les droites $x = a$ et $x = b$, en unités d'aire. On la calcule par la **géométrie** quand le domaine est simple (rectangle, triangle, trapèze, disque), sinon avec une **primitive**, ou on l'**encadre** par des rectangles.

Exercice 1 - Rectangle et triangle

Calculer, par des considérations d'aires :

a) $\int_0^3 2 dx$

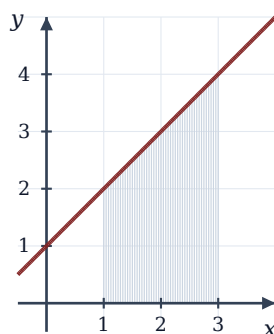
b) $\int_0^4 \frac{x}{2} dx$



La droite $y = x/2$ et l'aire du b) ; le segment $y = 2$ est celui du a)

Exercice 2 - Un trapèze

Calculer $\int_1^3 (x + 1) dx$ en utilisant l'aire d'un trapèze, puis vérifier avec une primitive.



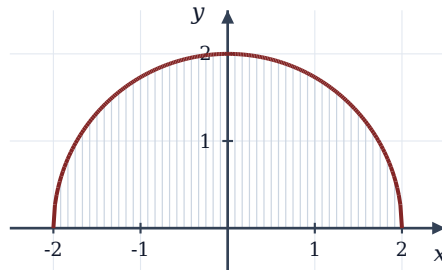
Le domaine sous la droite $y = x + 1$ entre 1 et 3

Exercice 3 – Un demi-disque

Soit $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ sur $[-2; 2]$.

a) Montrer que la courbe de f est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon.

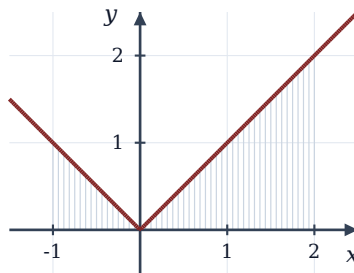
b) En déduire $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.



Courbe de f et domaine sous la courbe

Exercice 4 – Avec une valeur absolue

Calculer $\int_{-1}^2 |x| dx$ en interprétant l'intégrale comme une aire.



Courbe de $x \mapsto |x|$ et domaine entre -1 et 2

Exercice 5 – Changer d'unité d'aire

Dans un repère orthogonal, l'unité vaut 2 cm sur l'axe des abscisses et 1,5 cm sur l'axe des ordonnées. On a calculé $\int_0^2 f(x) dx = 3,5$ pour une fonction f positive.

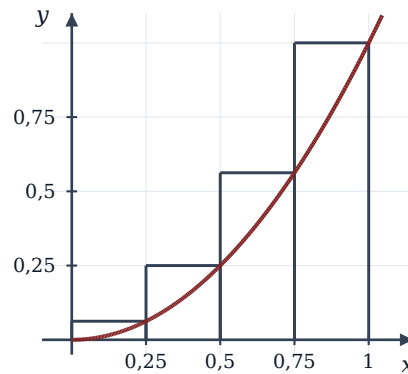
a) Quelle est l'unité d'aire en cm^2 ?

b) Quelle est l'aire du domaine en cm^2 ?

Exercice 6 - Encadrer avec des rectangles

On veut encadrer $I = \int_0^1 x^2 dx$ en découpant $[0; 1]$ en 4 bandes de largeur 0,25.

- Calculer la somme des aires des rectangles situés **sous** la courbe, puis de ceux situés **au-dessus**.
- En déduire un encadrement de I , puis comparer à la valeur exacte.



Les rectangles « au-dessus » de la courbe

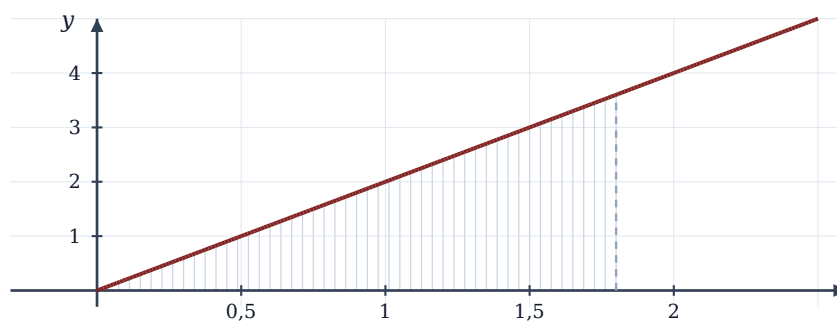
Exercice 7 - Comparer deux intégrales

Sans calcul de primitive, comparer $I = \int_0^1 x^2 dx$ et $J = \int_0^1 x^3 dx$. Vérifier ensuite par le calcul.

Exercice 8 - La fonction aire

Soit $f(t) = 2t$ et, pour $x \geq 0$, $A(x) = \int_0^x 2t dt$.

- Calculer $A(x)$ en utilisant l'aire d'un triangle.
- Calculer $A'(x)$. Que constate-t-on ?

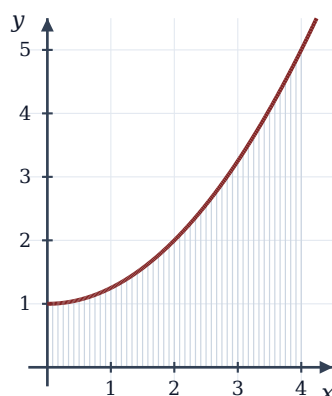


$A(x)$ est l'aire du triangle sous la droite, entre 0 et x (ici $x = 1,8$)

Exercice 9 - Estimer une aire sur une figure

On a tracé la courbe de $f(x) = 0,25x^2 + 1$ sur $[0 ; 4]$, dans un repère orthonormé.

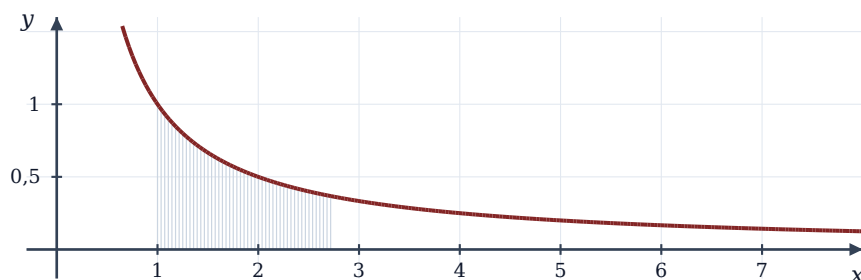
- En comptant les carreaux, estimer $\int_0^4 f(x) dx$.
- Calculer la valeur exacte à l'aide d'une primitive.



Domaine sous la courbe entre 0 et 4

Exercice 10 - L'aire sous l'hyperbole

Calculer l'aire du domaine situé sous la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$, entre les droites $x = 1$ et $x = e$. Même question entre $x = 1$ et $x = e^2$.



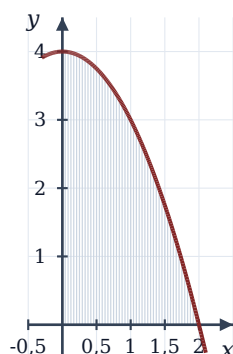
Domaine sous la courbe de $1/x$ entre 1 et e

Exercice 11 - L'aire sous l'exponentielle

- Calculer l'aire du domaine sous la courbe de l'exponentielle, entre $x = 0$ et $x = 1$.
- Justifier sans calcul que cette aire est comprise entre 1 et e .

Exercice 12 - Sous une parabole

Calculer l'aire du domaine compris entre la parabole d'équation $y = 4 - x^2$ et l'axe des abscisses, pour $x \in [0; 2]$. Comparer à l'aire du rectangle qui l'entoure.

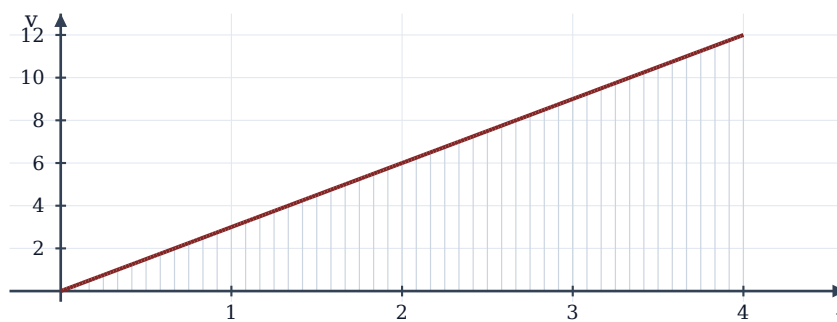


Domaine sous la parabole entre 0 et 2

Exercice 13 - Distance et aire sous la vitesse

Un cycliste démarre et accélère régulièrement : sa vitesse vaut $v(t) = 3t$ (en m/s) pendant 4 s.

- Représenter v et calculer la distance parcourue en interprétant $\int_0^4 v(t) dt$.
- Quelle est sa vitesse moyenne sur ces 4 secondes ?



Vitesse du cycliste ; l'aire colorée est la distance parcourue

Exercice 14 - Sous la racine carrée

Calculer l'aire du domaine situé sous la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ entre $x = 0$ et $x = 9$.

On pourra vérifier que $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de $\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

Exercice 15 - Encadrer une intégrale sans primitive

Soit $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ (on ne sait pas calculer de primitive).

- Justifier que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est décroissante sur $[0; 1]$, et en déduire $e^{-1} \leq I \leq 1$.
- Affiner l'encadrement avec deux rectangles de largeur 0,5.