

Plaquette 4 - Intégration par parties et applications

Calcul intégral — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

L'intégration par parties sert quand la fonction est un **produit** dont aucune forme composée ne donne de primitive (polynôme fois exponentielle, fois sinus, fois logarithme). On choisit u = le facteur qui **se simplifie en dérivant** (un polynôme, ou $\ln x$) et v' = celui dont on connaît une **primitive**. Si l'intégrale obtenue n'est pas plus simple, on a mal choisi.

Exercice 1 - Polynôme fois exponentielle

Calculer $\int_0^1 x e^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2 - Polynôme fois sinus

Calculer $\int_0^\pi x \sin x dx$.

Exercice 3 - Polynôme fois cosinus

Calculer $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.

Exercice 4 - Polynôme fois logarithme

Calculer $\int_1^e x \ln x dx$.

Exercice 5 - Logarithme sur x carré

Calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Exercice 6 - Fonction affine fois exponentielle décroissante

Calculer $\int_0^1 (2x + 1) e^{-x} dx$.

Exercice 7 - Une primitive du logarithme

Pour $x > 0$, on pose $L(x) = \int_1^x \ln t dt$.

- En écrivant $\ln t = 1 \times \ln t$, calculer $L(x)$ par intégration par parties.
- En déduire une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 8 - Le carré du logarithme

Calculer $\int_1^e (\ln x)^2 dx$, sachant que $\int_1^e \ln x dx = 1$.

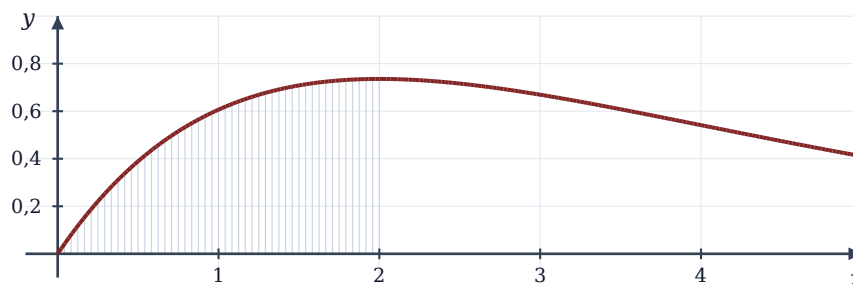
Exercice 9 - Une intégrale qui revient

Soit $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$.

- Par une intégration par parties, montrer que $I = -J$.
- Par une autre, montrer que $J = -e^{\pi} - 1 + I$.
- En déduire I .

Exercice 10 - Une aire par parties

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $f(x) = x e^{-x/2}$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.



Domaine sous la courbe de f entre 0 et 2

Exercice 11 - Une relation de récurrence

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$.

- Calculer I_0 .
- Par une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
- En déduire I_1 , I_2 et I_3 .

Exercice 12 - Valeur moyenne du logarithme

Calculer la valeur moyenne de la fonction $\ln$ sur $[1; e]$, sachant qu'une primitive de $\ln$ est $x \ln x - x$.

Exercice 13 - Distance parcourue

La vitesse d'un mobile (en m/s) vaut $v(t) = t e^{-t}$. Calculer la distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 3$ s.

Exercice 14 - Bien choisir u et v'

On veut calculer $K = \int_1^e x^2 \ln x \, dx$.

- Expliquer pourquoi le choix $u = x^2$, $v' = \ln x$ est mauvais.
- Calculer K avec le bon choix.

Exercice 15 – Quand l'intégration par parties est inutile

Un élève veut calculer $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ et $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx$ par intégration par parties.

- Montrer qu'une forme composée donne directement une primitive, et calculer les deux intégrales.
- Pourquoi l'intégration par parties avec $u = x$ échouerait-elle ?